COGNOME:		
NOME:		
MATR.:		

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 16 marzo 2018 - PARTE A[1]

1. Si mostri che l'insieme $V := \{x^2+y^2 = z^2, x+z = 1\}$ è un vincolo regolare bilatero (di codim.2) (3p.):

se $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-z^2 \\ x+z-1 \end{pmatrix}$ allora $M = \{(x,y,z) : g = \vec{0}\}$. Si ha

$J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x, & 2y, & -2z \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se considero $\frac{\partial g}{\partial(x,z)} = \begin{pmatrix} 2x & -2z \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

e faccio il determinante trovo $2x+2z$ che su M deve fare $\boxed{2 \neq 0}$

(dalla seconda equazione)

2. Dato l'insieme $V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 3, x > 0, y > 0\}$ si ha (3p.):

$\min_{(x,y)\in V} 3x + 4y =$ $\boxed{12}$ ($\boxed{\text{non esiste}}$), $\max_{(x,y)\in V} 3x + 4y =$ $\boxed{}$ ($\boxed{\cancel{\text{non esiste}}}$).

3. Se $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è continua e integrabile all'infinito in senso improprio secondo Riemann, allora f è integrabile secondo Lebesgue su $[0, +\infty[$ purché f sia $\boxed{\text{(POSITIVA)} \quad \geq 0}$ (1p.).

4. Se $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^N$, con $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, allora per avere $m^*(A_1 \cup A_2) = m^*(A_1) + m^*(A_2)$ bisogna supporre A_1 e A_2 $\boxed{\text{MISURABILI}}$ (1p.).

5. Si consideri la seguente situazione: $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^N$ dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^N$ e Φ è di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$ con $\det(J_\Phi(x)) \neq 0$ per ogni $x \in \Omega$. Poniamo $\Omega_1 := \Phi(\Omega)$.

È vero che Ω_1 è aperto? (1p.) $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$. È vero che $\Phi : \Omega \to \Omega_1$ è bigettiva? (1p.) $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$.

Cosa dice il teorema di inversione locale (2p.)?

Enunciato: Dato $x_0 \in \Omega$ esiste $\rho > 0$ tale che

(a) $\Phi(B(x_0,\rho))$ è aperto (b) Φ è iniettivo su $B(x_0,\rho)$

(c) $\Phi^{-1} : \Phi(B(x_0,\rho)) \to \Omega$ (che dunque esiste) è differenziabile

e $J_{\Phi^{-1}}(y) = J_\Phi(x)^{-1}$ dove $y = \Phi(x)$

[1] PUNTEGGIO MINIMO Voto A$\geq$ 4; Voto A+Voto B$\geq$ 10 Tempo: mezzora per la parte A, un ora e mezza per la parte B

(2) Uso i moltiplicatori con $f(x,y) = 3x + 4y$ e $g(x,y) = xy - 3$

$$\begin{cases} 3 = \lambda y \\ 4 = \lambda x \\ xy = 3 \end{cases} \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ 3}}{xy} = 12\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow (x,y) = \pm\left(2, \frac{3}{2}\right)$$

(MA IL - NON È ACCETTABILE

e quindi l'unico punto è $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ su cui ho $6 + 4 \cdot \frac{3}{2} = 12$

[è chiaro che il massimo non esiste: se metto $y = \frac{3}{x}$ trovo $\varphi(x)$ $3x + \frac{12}{x}$ che non ha max - posso anche trovare il minimo senza usare i moltiplicatori facendo $\varphi'(x) = 3 - \frac{12}{x^2}$. $\Rightarrow x^2 = 4$ da cui $x = 2$, $y = \frac{3}{2}$ come prima)

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) := x(y + 2)$ e l'insieme $M := \{(x, y) : 4x^2 + y^2 \leq 4\}$. Si risponda (giustificando) alle seguenti domande.

   (a) f ha massimo e minimo su M (1p.) $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$.

   (b) si ha (7p.):

$$\min_{(x,y)\in M} f(x,y) = \boxed{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}, \quad \max_{(x,y)\in M} f(x,y) = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{2}},$$

Svolgimento

(a) f è continua, M è chiuso e limitato (se $4x^2+y^2 \leq 4 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 5 \Rightarrow \|(x,y)\| \leq 2$)

dunque $\exists \max_M f \,/\, \min_M f$ per Weierstrass.

(b) $\frac{\partial f}{\partial x} = y+2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$. L'UNICO PUNTO CRITICO È $(0,-2)$ che non appartiene a $\mathring{M} = \{4x^2+y^2<4\}$. Cerchiamo i punti critici vincolati a $\{4x^2+y^2=4\} = \partial M$.

$$\begin{cases} y+2 = \lambda \cdot 8x \\ x = \lambda\, 2y \\ 4x^2+y^2 = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} y(y+2) = 8\lambda xy \\ 4x^2 = 8\lambda xy \end{matrix} \Longrightarrow y(y+2) = 4x^2$$

LO METTO NEL SISTEMA (POTREI AVERE AGGIUNTO SOLUZIONI CON $x=0$/$y=0$)

$$\begin{cases} 2\lambda y = x \\ 4x^2 = y^2+2y \\ 4x^2+y^2=4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\lambda y = x \\ 2y^2+2y-4=0 \\ 4x^2+y^2=4 \end{cases} \Longrightarrow y = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

SE $y=-2$ dalla III° TROVO $4x^2=0 \Leftrightarrow x=0$ (e $\lambda=0$ dalla I°

SE $y=1$ dalla III° TROVO $4x^2=3 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (e $\lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$ dalla I°)

ALLA FINE HO 3 PUNTI: $(0,-2)$, $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

(SONO TUTTE BUONE DATO CHE HANNO COMPONENTI NON NULLE) CALCOLO f su questi punti: $f(0,-2)=0$ $\quad f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},1\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3 \begin{cases} 3\sqrt{3}/2 & \text{MAX} \\ -3\sqrt{3}/2 & \text{MIN} \end{cases}$

2. Siano $M := \{(x,y,z) : x^2z - y^2z + xyz + 1 = 0, xyz + 1 = 0\}$ e $P_0 := (1,-1,1)$.

   (a) Si mostri che esiste una curva $\gamma : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}^2$, di classe $\mathcal{C}^1$, per $\delta > 0$ piccolo, tale che $\gamma(1) = (-1,1)$ e i punti di M vicini a P_0 sono tutti e soli della forma $P = (t, \gamma_1(t), \gamma_2(t))$ con $1-\delta \le t \le 1+\delta$ (4p.).

   (b) Si calcolino (4p.):

$$\gamma_1'(1) = \boxed{-1}, \qquad \gamma_2'(1) = \boxed{-2}.$$

Svolgimento

Pongo $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2z - y^2z + xyz + 1 \\ xyz + 1 \end{pmatrix}$ $\quad (\Rightarrow M = \{ g(x,y,z) = \vec{0} \})$

Si ha $g(1,-1,1) = 0 \Rightarrow P_0 \in M$.

$$\frac{\partial g}{\partial(xyz)} = \begin{pmatrix} 2xz + yz & , -2yz + xz & , x^2 - y^2 + xy \\ yz & , xz & , xy \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial(xyz)}(P_0) = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}}_{\frac{\partial g}{\partial x}} & \underbrace{\begin{matrix} , 3 & , -1 \\ 1 & -1 \end{matrix}}_{\frac{\partial g}{\partial(yz)}} \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(\frac{\partial g}{\partial(yz)} P_0\right) = -3 + 1 = -2$$

$\Rightarrow$ VALE DINI! $\Rightarrow \exists\ y(x)$ e $z(x)$ che esplicitano M per $x \simeq 1$. $\left((x,y,z) \simeq (1,-1,1) \right)$. Posso indicare $\gamma(x) = (y(x), z(x))$

Si ha:
$$\frac{\partial(yz)}{\partial x} = -\left(\frac{\partial g}{\partial(yz)}(P_0)\right)^{-1} \frac{\partial g(P_0)}{\partial x} = -\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-1 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Se $D := \{(x,y,z) : x \geq y \geq 0, z \geq \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ si calcoli l'integrale (8p.):

$$\iiint_D \frac{xyz}{1+x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \boxed{\frac{(2\ln(2)-1)}{256}}.$$

Svolgimento

Posso a coordinate sferiche: $x = \rho\cos\theta\sin\varphi \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi \quad z = \rho\cos\varphi$

L'appartenenza di (x,y,z) a D si traduce in

$\rho\cos\theta\sin\varphi \geq \rho\sin\theta\sin\varphi \geq 0, \ \rho^2 \leq 1, \ \rho\cos\varphi \geq \sqrt{\rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi} = \rho\sin\varphi$

$\cos\theta \geq \sin\varphi \geq 0, \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \ 0 \leq \rho \leq 1 \iff 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \ 0 \leq \rho \leq 1$

L'integrale allora diventa:

$$\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho\cos\theta\sin\varphi\ \rho\sin\theta\sin\varphi\ \rho\cos\varphi \quad \rho^2\sin\varphi}{\rho^2}\,d\rho =$$

$$\underbrace{\int_0^{\pi/4}\cos\theta\sin\theta\,d\theta}_{1}\ \underbrace{\int_0^{\pi/4}\sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi}_{2}\ \underbrace{\int_0^1 \frac{\rho^5}{1+\rho^2}\,d\rho}_{3} =$$

$\sin\varphi = s$
$\rho^2 = r$

$$1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sin 2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\Big[-\cos 2\theta\Big]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}$$

$$2 = \int_0^{\sqrt{2}/2} s^3\,ds \quad (\text{ho posto } s = \sin\varphi) \quad = \left[\frac{s^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-0\right) = \frac{1}{16}$$

$$3 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,dt \quad (\text{ho posto } t = \rho^2) = \frac{1}{2}\int_0^1\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1+\ln(2)\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(2)-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(2\ln(2)-1)$$

$$\Rightarrow \text{INTEGRALE} = \frac{(2\ln(2)-1)}{256} \qquad 4 \times 4 \times 16$$

Lo faccio in coordinate cilindriche $\Rightarrow$ $x = \rho\cos\theta \quad y = \rho\sin\theta \quad z = z$

$\rho\cos\theta \geq \rho\sin\theta \geq 0 \iff 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \ z \geq \rho, \ \rho^2+z^2 \leq 1$. DUNQUE

$\rho \leq z \leq \sqrt{1-\rho^2}$ che implica $\rho^2 \leq 1-\rho^2 \iff \rho \leq \sqrt{2}/2$

$$\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{2}/2} d\rho \int_\rho^{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{\rho^2\cos\theta\sin\theta\ z}{1+\rho^2+z^2}\rho\,dz = \int_0^{\pi/4}\cos\theta\sin\theta\,d\theta \int_0^{\sqrt{2}/2}\rho^3 d\rho \int_\rho^{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{z}{1+\rho^2+z^2}\,dz$$

- Il primo integrale, come prima fa $\frac{1}{4}$.
- Nell'altro pezzo sostituisco $z^2 = t$ e trovo

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \rho^3 \, d\rho \, \frac{1}{2} \int_{\rho^2}^{1-\rho^2} \frac{dt}{1+\rho^2+t} = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}/2} \rho^3 \left[\ln(1+\rho^2+t) \right]_{\rho^2}^{1-\rho^2} d\rho =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}/2} \rho^3 \left(\ln 2 - \ln(1+2\rho^2) \right) d\rho = (s = 2\rho^2) = \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{s}{2} \left(\ln(2) - \ln(1+s) \right) ds =$$

$$\frac{\ln(2)}{16} \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^1 - \frac{1}{16} \int_0^{1/2} s \ln(1+s) \, ds = \frac{\ln(2)}{32} - \frac{1}{16} \left[\frac{s^2}{2} \ln(1+s) \right]_0^1 + \frac{1}{32} \int_0^1 \frac{s^2}{1+s}$$

$$\frac{\ln(2)}{32} - \frac{1}{32} \ln(2) + \frac{1}{32} \int_0^1 \left(s - 1 + \frac{1}{1+s} \right) ds = \frac{1}{32} \left[\frac{s^2}{2} - s + \ln(1+s) \right]_0^1 =$$

$$\frac{1}{32} \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right) = \frac{2\ln(2) - 1}{64}$$

. MOLTIPLICANDO PER $\frac{1}{4}$ ottengo il risultato di prima