COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 17 febbraio 2018 - PARTE A[1]

1. Data $f(x,y) = e^{x-y}\sqrt{1+xy}$ si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 di f in $P_0 = (0,0)$ (2p.):

$$P(x,y) \left(= P_{2,(0,0)}(x,y)\right) = \boxed{1} + \boxed{1}\, x + \boxed{-1}\, y + \boxed{1/2}\, x^2 + \boxed{-1/2}\, xy + \boxed{1/2}\, y^2.$$

2. Siano $L > 0$ e $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2$. Si scriva lo sviluppo di f in soli seni (2p.): $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x)$ dove:

$$\omega = \boxed{\frac{\pi}{L}} \qquad b_n = \boxed{\frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin(n\omega x)\, dx}.$$

Si dica inoltre se la serie converge uniformemente $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$ (1p.). (c'è un teorema!!)

3. Dato l'insieme $M := \{(x,y,z) : e^{y(x-z)} = z\}$ in $\mathbb{R}^3$ e il punto $P_0) := (1,1,1)$ si mostri che $P_0 \in M$ e (usando il teorema delle funzioni implicite) che vicino al punto P_0 è possibile descrivere M mediante una funzione $z(x,y)$ definita in un intorno id $(1,1)$ (si può esplicitare z in termini di x,y) (2p.)

Si calcoli poi (2p.) $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = \boxed{-1/2}$

Pongo $g(x,y,z) = e^{y(x-z)} - z$, di modo che $M = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 0\}$.
Dato che $g(P_0) = e^{1(1-1)} - 1 = e^0 - 1 = 0 \Rightarrow P_0 \in M$. Inoltre

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} y e^{y(x-z)} \\ (x-z) e^{y(x-z)} \\ -y e^{y(x-z)} - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla g(P_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dato che $\frac{\partial}{\partial z} g(P_0) = -2 \neq 0$, per il Dini, si può esplicitare $z = z(x,y)$ vicino a $(1,1)$

Sempre per il Dini si ha:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(P_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(P_0)} = -\frac{-1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

[1] PUNTEGGIO MINIMO VotoA$\geq$5p. Voto=VotoA+VotoB ($0 \leq$ Voto ≤ 38) - Lode se Voto≥ 33

4. Si dica (giustificando) se il campo $\vec{f}(x,y) := 2xy\vec{\mathbf{i}} - (x^2 - y^2)\vec{\mathbf{j}}$ è conservativo: $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$ (2p.).

$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} 2xy = 2x \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -2x$ dunque $\vec{f}$ non è irrotazionale $\Rightarrow$ non è conservativo

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Se un campo $\vec{f}$ di classe $\mathcal{C}^1$ ha integrale curvilineo nullo su ogni curva chiusa del suo dominio, allora è irrotazionale. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(b) Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^2$, se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è di classe $\mathcal{C}^2$ e se $x_0 \in \Omega$ è un punto di massimo per f, allora la matrice Hessiana di f in x_0 ha tutti autovalori < 0. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(c) Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^2$, se $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ è di classe $\mathcal{C}^1$ e se $x_0 \in \Omega$, allora la matrice Jacobiana di f in x_0 è una matrice 2×2 simmetrica. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(d) Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una curva derivabile, allora per ogni $t \in]a,b[$ è definita la retta tangente a γ nel punto $\gamma(t)$. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(1) $\sqrt{1+xy} = 1 + \frac{xy}{2} + o(xy) = 1 + \frac{xy}{2} + o(\|(x,y)\|^2) \qquad e^{x-y} = 1 + (x-y) + \frac{(x-y)^2}{2} + o(\|(x,y)\|^2)$

$\Rightarrow f(x,y) = \left(1 + \frac{xy}{2} + o(\|(x,y)\|^2)\right)\left(1 + x - y + \frac{x^2-2xy+y^2}{2} + o(\|(x,y)\|^2)\right) =$

$1 + x - y + \frac{x^2-2xy+y^2}{2} + \frac{xy}{2} + o(\|(x,y)\|^2) = 1 + x - y + \frac{x^2}{2} - \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{2} + o(\cdot)$

(a) vero perché $\vec{f}$ risulta conservativo $\Rightarrow$ irrotazionale

(b) GLI AUTOVALORI POSSONO ESSERE NULLI (per es $f(x,y) = -x^4 - y^4$)

(c) NON C'È MOTIVO CHE J_f SIA SIMMETRICO. Se A è una qualunque matrice 2×2 (anche non simmetrica) e se $f(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow J_f = A$!!!

(d) Se $\gamma'(t) = 0$ non è definita la retta tangente: PER ES. $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ per $t \in [-1,1]$ ho una cuspide in $t=0$

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 17 febbraio 2018 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) := x^4 + y^4 + 4x^3y + 8x^2y^2 + 4xy^3 - 36x - 36y$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (3p.).

   $(x, y) =$ $(1,1)$ punto di SELLA $(x, y) =$ ______ punto di ______
   $(x, y) =$ $(0,\sqrt[3]{9})$ punto di MINIMO $(x, y) =$ $(\sqrt[3]{9},0)$ punto di MINIMO

   (b) Si dica se f ha massimo/minimo su $M := \{x + y = 2\}$ e in caso affermativo si calcolino tali valori (3p.):

   $\min_M f =$ -56 $\boxed{\text{non esiste}}$ / $\max_M f =$ ______ $\boxed{\text{non \cancel{esiste}}}$

Svolgimento

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 12x^2y + 16xy^2 + 4y^3 - 36$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4x^3 + 16x^2y + 12xy^2 - 36$$

PTI STAZ. $\rightarrow \begin{cases} 4x^3 + 12x^2y + 16xy^2 + 4y^3 = 36 \\ 4y^3 + 4x^3 + 16x^2y + 12xy^2 = 36 \end{cases}$

Se faccio la differenza tra le due righe $\Rightarrow -4x^2y + 4xy^2 = 0 \Leftrightarrow xy(y-x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ oppure $y = 0$ oppure $x = y$.

SE $x = 0$ DAL SISTEMA $\rightarrow 4y^3 = 36 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{9}$

SE $y = 0$ DAL SISTEMA $\rightarrow 4x^3 = 36 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{9}$

SE $x = y$ DAL SISTEMA $\rightarrow (4+12+16+4)x^3 = 36 \Leftrightarrow x = 1$

TROVO TRE PTI STAZ. $\Rightarrow \begin{cases} P_1 = (0, \sqrt[3]{9}) \\ P_2 = (\sqrt[3]{9}, 0) \\ P_3 = (1,1) \end{cases}$

Faccio le derivate II^e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 24xy + 16y^2 ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12x^2 + 32xy + 12y^2 ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 + 24xy + 16x^2$$

Da cui

$Hf(0,\sqrt[3]{9}) = \sqrt[3]{81} \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}$ det >0, $a_{11} > 0$ PTO DI MINIMO

$Hf(\sqrt[3]{9},0) = \sqrt[3]{81} \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$ " " " " "

$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 52 & 56 \\ 56 & 52 \end{pmatrix}$ det <0 PTO DI SELLA

. Se mi metto sulla retta $x + y = 2$ posso considerare

$$f(x, 2-x) = x^4 + (2-x)^4 + 4x^3(2-x) + 8x^2(2-x)^2 + 4x(2-x)^3 - 36x - 36(2-x)$$
$$= x^4 \Big[\underbrace{1 + \left(1 - \tfrac{2}{x}\right)^4 - 4\left(2 - \tfrac{1}{x}\right) + 8\left(1 - \tfrac{2}{x}\right)^2 - 4\left(1 - \tfrac{2}{x}\right)^3}_{\text{TENDE A } 1+1-4+8-4 = 2 > 0} - \frac{36}{x^3} - 36\left(\frac{2-x}{x^4}\right)$$

$\Rightarrow f(x, 2-x) \to +\infty$. $\sup_M f = +\infty$, $\exists \min_M f$. . Per trovare il minimo uso i moltiplicatori con la condizione $0 = g(x,y) = x + y - 2$.

$$\begin{cases} 4x^3+12x^2y+16xy^2+4y^3-36=\lambda \\ 4y^3+4x^3+16x^2y+12xy^2-36=\lambda \\ x+y=2 \end{cases}$$

FACENDO LA DIFFERENZA TRA I° e II° RIGA TROVO, COME PRIMA $x=0$ / $y=0$ / $x=y$

SE $x=0 \Rightarrow y=2$ (e λ è tale che valgono le prime due righe)

SE $y=0 \Rightarrow x=2$

SE $x=y \Rightarrow x=y=1$

VEDO IL VALORE DI f in questi punti

$f(0,2)=2^4-36\cdot 2=16-72=-56=f(2,0)$ $\Rightarrow$ IL MINIMO E' -56

$f(1,1)=1+1+4+8+4-36-36=-54$

2. Si considerino l'insieme S e il campo vettoriale $\vec{f}$ definiti da:

$$S:=\{(x,y,x)\,:x^2+y^2=4-z,z\geq 3\},\ \vec{f}(x,y,z):=x(z-y^2)\vec{\mathbf{i}}-y(z+x^2)\vec{\mathbf{j}}+z(x^2+y^2)\vec{\mathbf{k}}.$$

(a) Si trovi una parametrizzazione Γ che rende S (sostegno di) una superficie regolare avente normale $\vec{\nu}$ concorde con il versore $\vec{\mathbf{k}}$. (1p.)

$\Gamma(u,v)=$ $\boxed{(u,v,\ 4-u^2-v^2)}$

per $(u,v)\in$ $\boxed{\{u^2+v^2\leq 1\}}$.

(b) Si provi che $\vec{f}$ è solenoidale e si trovi un potenziale vettore $\vec{F}$ per $\vec{f}$ (2p.)

$\vec{F}=$ $\boxed{-\frac{yz}{2}(2x^2+z)\,\vec{i}+\frac{xz}{2}(2y^2-z)\,)}$ (+ un qualunque gradiente)

(c) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso S (con la normale detta sopra) (2p.)

$$\iint_S \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \boxed{\frac{3}{2}\pi}$$

(d) Se γ precorre il bordo di S coerentemente con la normale detta sopra, si calcoli l'integrale curvilineo (1p.):

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s}=\boxed{\frac{3}{2}\pi}$$

Svolgimento

(b) $\operatorname{div}\vec{f}=z-y^2-(z+x^2)+x^2+y^2=0 \Rightarrow \vec{f}$ è solenoidale. Cerco $\vec{F}=\begin{pmatrix}F_1\\F_2\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \operatorname{rot}\vec{F}=\begin{pmatrix}-\frac{\partial}{\partial z}F_2\\ \frac{\partial}{\partial z}F_1\\ \frac{\partial}{\partial x}F_2-\frac{\partial}{\partial y}F_1\end{pmatrix}$. Allora $F_1=\int -y(z+x^2)\,dz=-\frac{yz^2}{2}-x^2yz+c(x,y)$

Analogamente $F_2=-\int x(z-y^2)\,dz=-\frac{xz^2}{2}+xy^2z+d(x,y)$. ALLORA

$\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}=-\cancel{\frac{z^2}{2}}+y^2z+d_x(x,y)+\cancel{\frac{z^2}{2}}+x^2y-c_x(x,y)$ CHE DEVE VALERE $z(x^2+y^2)$

SE PRENDO $c=d=0$ TUTTO TORNA

c) Prendo $\Omega = \{ 3 \le z \le 4 - x^2 - y^2 \}$. Allora $\partial\Omega = S \cup B$ dove $B = \{ (x,y,3) : x^2+y^2 \le 1 \}$. Noto che su B la normale uscente da Ω è $-\vec{k}$. Per il t. della divergenza

$$0 = \iiint_\Omega \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\operatorname{div} \vec{g}} \, dx\,dy\,dz = \iint_S \vec{g} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma + \iint_B \vec{g} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma .$$ Si ha

$$\iint_B \vec{g} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma = \iint_{\{x^2+y^2 \le 1\}} g_3(x,y,3) \, \vec{k} \cdot (-\vec{k}) \, dx\,dy = -\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} 3(x^2+y^2) \, dx\,dy =$$

$$-3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho \, d\rho = -3 \cdot 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = -\frac{3\pi}{2}.$$ Per differenza:

$$\iint_S \vec{g} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma = \frac{3}{2}\pi$$

(d) Per Stokes $$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma = \iint_S \vec{g} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma = \frac{3}{2}\pi$$

si può comunque fare l'integrale (e ottenere il risultato di c) in un altro modo)

Parametrizzo γ : $\gamma(t) = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow \gamma'(t) = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} \Rightarrow$

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} F(\cos(\theta), \sin(\theta), 3) \cdot (-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}) \, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \left[-\frac{\sin\theta \cdot 3}{2} (2\cos^2\theta + 3)(-\sin\theta) + \frac{\cos\theta \cdot 3}{2} (2\sin^2\theta - 3)\cos\theta \right] d\theta =$$

$$3 \int_0^{2\pi} \left[\sin^2\theta \cos^2\theta + \frac{3}{2}\sin^2\theta + \cos^2\theta \sin^2\theta - \frac{3}{2}\cos^2\theta \right] d\theta =$$

$$6 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta + \frac{9}{2} \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta - \cos^2\theta) \, d\theta = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta) \, d\theta + \frac{9}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(2\theta) \, d\theta}_{=0}$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(4\theta)}{2} \, d\theta = \frac{3}{2} \cdot \frac{2\pi}{2} - \frac{3}{4} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(4\theta) \, d\theta}_{=0} = \frac{3\pi}{2}$$

3. (☐ scelgo di fare l'esercizio alternativo essendo iscritto prima dell'a.a. 2015-16)

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = x+4y+4z \\ y' = 2y+z \\ z' = -y \end{cases}$$

(a) Chiamiamo A la matrice associata al sistema e J la forma di Jordan di A. Si trovi il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ e si verifichi che p ha una sola radice $\hat\lambda$ di molteplicità geometrica $\hat\mu_G$.
Si scrivano: (4p.):

$p(\lambda) = \boxed{(1-\lambda)^3}$ $\hat\lambda = \boxed{1}$ $\hat\mu_G = \boxed{2}$

$(A-\hat\lambda I) = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}}$, $(A-\hat\lambda I)^2 = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$,

$J = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$, $e^{tJ} = \boxed{e^t\begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$,

(b) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0)=0$, $y(0)=2$, $z(0)=-1$ (3p.)

$x(t) = \boxed{4t\,e^t}$ $y(t) = \boxed{(t+2)\,e^t}$ $z(t) = \boxed{-(t+1)\,e^t}$

Svolgimento

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P(\lambda) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} =$$

$$(1-\lambda)\left[(2-\lambda)(-\lambda)+1\right] = (1-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2) = (1-\lambda)^3$$

$B := A - I = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ ha rango 1 (le tre righe sono tutte multipli di $(0,1,1)$) e Ker di dimensione 2. Ne segue

$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mu_G = 2$. Da questo si ha $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e $e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} = e^t\begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Cerchiamo la base di autovettori generalizzati.

I°) Prendo e_2 in modo che $Be^2 \neq 0$. Se $e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow Be_2 = (y+z)\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

e posso prendere $x=0$ $y=2$ $z=-1$, cioè $\boxed{e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$. A questo punto

$\boxed{e_1 := Be_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ è un autovalore. Mi serve un secondo autovalore $e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

indipendente da e_1, cioè $e_3 \in \operatorname{Ker} B$, e_1 indip. da e_1. La prima condizione equivale a $y+z=0$. Se prendo $y=z=0$ e $x=1$ trovo $\boxed{e_1=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}}$ che è indipendente da e_2. Se allora $M=[e_1,e_2,e_3]=\begin{bmatrix}4&0&1\\1&2&0\\-1&-1&0\end{bmatrix}$ si ha $A=MJM^{-1}$. Volendo $M^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\0&1&1\\1&4&8\end{bmatrix}$ (ma si può evitare di calcolarlo)

Se ora $Y_0=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ vedo che $Y_0=e_2$. Dato che $M\hat{e}_2=e_2$ si ha $M^{-1}e_2=\hat{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Allora la soluzione $Y(t)$ con $Y(0)=Y_0$ è data da

$$Y(t)=e^{tA}Y_0=Me^{tJ}M^{-1}e_2=Me^{tJ}\hat{e}_2=e^tM\begin{bmatrix}1&t&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=e^tM\begin{bmatrix}t\\1\\0\end{bmatrix}=$$
$$e^t\begin{bmatrix}4&0&1\\1&2&0\\-1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\1\\0\end{bmatrix}=e^t\begin{bmatrix}4t\\t+2\\-t-1\end{bmatrix}$$

VERIFICA (non richiesto).

$$x'(t)=e^t\cdot 4t+e^t\cdot 4=(4t+4)e^t$$
$$y'(t)=e^t(t+2)+e^t=(t+3)e^t$$
$$z'(t)=e^t(-t-1)+e^t(-1)=(-t-2)e^t$$
$$x(t)+4y(t)+4z(t)=e^t(4t+\cancel{4t}+8-\cancel{4t}-4)=e^t(4t+4)=x'(t)$$
$$2y(t)+z(t)=e^t(2t+4-t-1)=e^t(t+3)=y'(t)$$
$$-y(t)=(-t-2)e^t=z'(t)$$

TORNA

4. Data l'equazione differenziale (lineare):

$$xy''-y'-y=x$$

si cerchino le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ mediante una serie di potenze $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

Si risponda in particolare ai sequenti quesiti.

(a) Si scriva una formula ricorsiva per i coefficienti a_n (2p.)

$a_0=1$, $a_1=-1$, $a_2\in\mathbb{R}$ (LIBERA)

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n^2-1}\quad\forall n\geq 2$

($\mathcal{R}$)

(b) Esiste una soluzione y con $y(0) = 1$? $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$ (1p.);

(c) Esiste un'unica soluzione y con $y'(0) = -1$? $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$ (1p.);

(d) Si mostri che esiste un'unica soluzione y con $y''(0) = 6$ (1p); se ne trovi il raggio di convergenza: $R = \boxed{+\infty}$ (1p.) e si dica quanto fa $y^{(4)}(0) = \boxed{3}$ (1p.).

Svolgimento

(a) $y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$, $y'(x) = \sum_1^\infty a_n n x^{n-1} = \sum_0^\infty a_{n+1}(n+1) x^n$, $y'' = \sum_2^\infty a_n n(n-1) x^{n-2}$

$= \sum_1^\infty a_{n+1}(n+1) n x^{n-1} \Rightarrow x y'' = \sum_1^\infty a_{n+1} n(n+1) x^n = \sum_0^\infty a_{n+1} n(n+1) x^n$

ALLORA $x y'' - y' - y = \sum_0^\infty [a_{n+1} n(n+1) - a_{n+1}(n+1) - a_n] x^n = \sum_0^\infty (a_{n+1}(n^2-1) - a_n) x^n$

DUNQUE TROVO

$(n^2-1) a_{n+1} - a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 1 \\ 1 & \text{se } n = 1 \end{cases}$.

Se metto $n=1 \to 0 \cdot a_2 - a_1 = 1 \iff a_1 = -1$. Se metto $n = 0 \to -a_1 - a_0 = 0 \iff a_0 = -a_1 = 1$

Da $n=2$ in poi la condizione diventa $a_{n+1} = \frac{a_n}{n^2-1}$

(b) ESISTONO INFINITE SOLUZIONI (al variare di a_2) e tutte verificano $a_0 = y(0) = 1$. DUNQUE LA RISPOSTA È SI

(c) Per quanto detto in b) tutte le soluzioni hanno $a_1 = y'(0) = -1$

Ma le soluzioni sono infinite $\Rightarrow$ la sol. non è unica

(d) Se impongo $y''(0) = 6$ trovo $a_2 = \frac{y''(0)}{2} = 3$ che individua una e una sola soluzione. Inoltre

$a_3 = \frac{a_2}{2^2-1} = \frac{a_2}{3} = 1$; $a_4 = \frac{a_3}{3^2-1} = \frac{a_3}{8} = \frac{1}{8}$.

Ma $a_4 = \frac{y^{(4)}(0)}{24} \Rightarrow y^{(4)}(0) = 24\, a_4 = \frac{24}{8} = 3$

Inoltre da R trovo $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2-1} = 0$

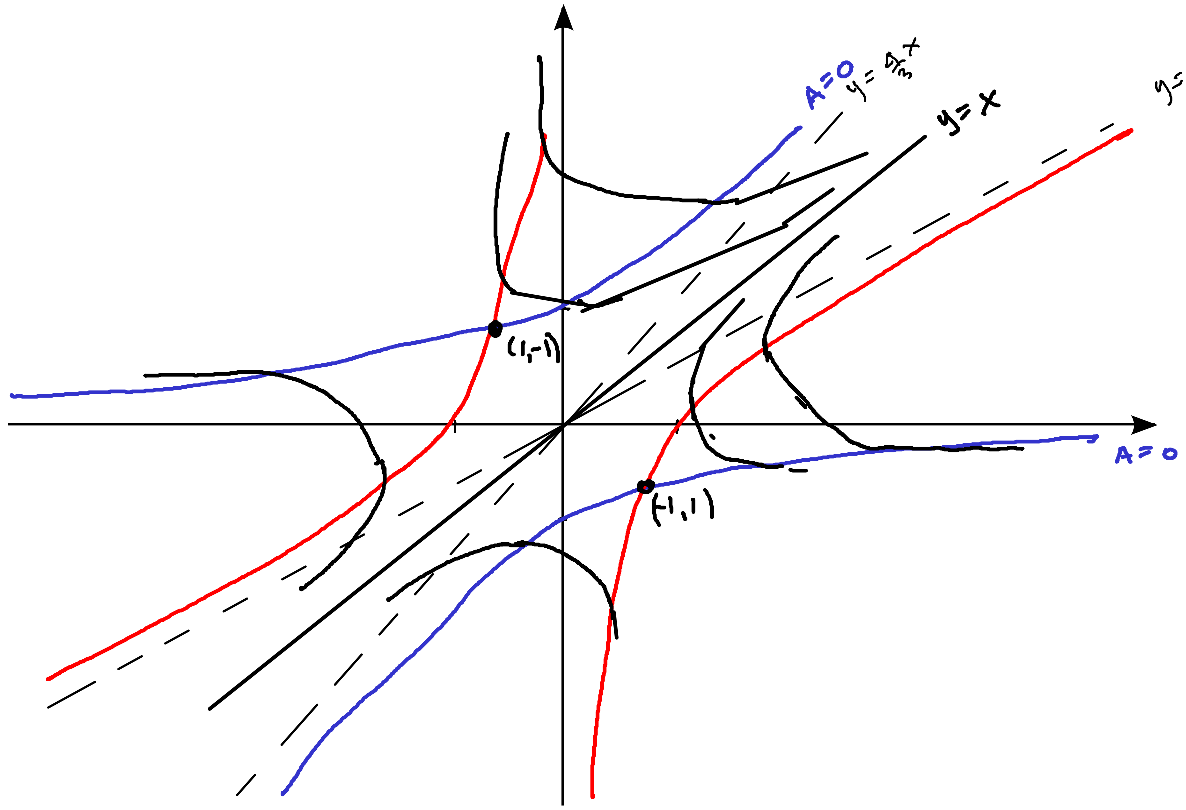
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 \Rightarrow R = +\infty$ ($a_n \geq 0$ se $a_2 > 0$)

CESARO

Variante esercizio 3 della seconda parte: gli iscritti precedentemente al 2015-16 possono scegliere tra questo e il precedente. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{4xy - 3y^2 + 1}{4xy - 3x^2 + 1}$$

1. Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).



2. Si trovi un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x, y) = \lambda(xy)$ (2,5p.). Si trovi poi un integrale primo Φ (2,5p.).

$\lambda(x, y) = \boxed{(1+xy)^2}$, $\Phi(x, y) = \boxed{(1+xy)^3(x-y)}$

3. Si trovi la soluzione $y(x)$ relativa al dato iniziale $(1, 1)$, e se ne riporti il grafico nel diagramma della pagina precedente (1p.)

$y(x) = \boxed{x}$

Svolgimento

(a) $A(x,y) := 4xy - 3y^2 + 1 = 0 \iff y \neq 0$ e $x = \frac{3y^2-1}{4y} = \frac{3}{4}y - \frac{1}{4y}$ (LINEA BLU)

$B(x,y) := 4xy - 3x^2 + 1 = 0 \iff x \neq 0$ e $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4x}$ (LINEA ROSSA)

LE DUE CURVE SI INTERSECANO IN $\pm(1,-1)$

(b) Deve essere $0 = \frac{\partial}{\partial y}\lambda(xy)A(x,y) + \frac{\partial}{\partial x}\lambda(xy)B(x,y) =$

$\lambda'(xy)x(4xy-3y^2+1) + \lambda(xy)(4x-6y) + \lambda'(xy)y(4xy-3x^2+1) + \lambda(xy)(4y-6x) =$

$\lambda'(xy)(4x^2y-3xy^2+x+4xy^2-3x^2y+y) - 2\lambda(xy)(x+y) =$

$\lambda'(xy)(x^2y+xy^2+x+y) - 2\lambda(xy)(x+y) = \lambda'(xy)\big(xy(x+y)+(x+y)\big) - 2\lambda(xy)(x+y)$

$= (x+y)[\lambda'(xy)(xy+1) - 2\lambda(xy)] \Rightarrow \lambda'(t) = \frac{2\lambda(t)}{1+t} \Rightarrow \lambda(t) = c(1+t)^2$

POSSO PRENDERE $\lambda(x,y) = (1+xy)^2$. Se ϕ è un int. primo:

$\frac{\partial\phi}{\partial x} = (1+xy)^2(4xy-3y^2+1) \Rightarrow \phi = \int (1+xy)^2(4xy-3y^2+1)\,dx =$ (per parti)

$\frac{(1+xy)^3}{3y}(4xy-3y^2+1) - \int \frac{(1+xy)^3}{3\cancel{y}}\,4\cancel{y}\,dx = \frac{(1+xy)^3}{3y}(4xy-3y^2+1)$

$-\frac{(1+xy)^4}{3y} + c(y) = \frac{(1+xy)^3}{3y}\left[4xy-3y^2+1-1-xy\right] + c(y) = \frac{(1+xy)^3}{3y}(3xy-3y^2) + c(y)$

$= (1+xy)^3(x-y) + c(y)$. SE DERIVO RISPETTO A y:

$\frac{\partial}{\partial y}\left((1+xy)^3(x-y) + c(y)\right) = 3(1+xy)^2x(x-y) - (1+xy)^3 + c'(y) =$

$(1+xy)^2(3x^2-3xy-1-xy) + c'(y) = (1+xy)^2(3x^2-4xy-1) + c'(y)$

che deve essere $-B(x,y)$. $\Rightarrow c'=0$. Prendo $c=0$ e ho

$$\phi(x,y) = (1+xy)^3(x-y)$$

(c) Se prendo $x_0=1$, $y_0=1 \Rightarrow \phi(x_0,y_0) = \phi(1,1) = 0$

$\Rightarrow \phi(x,y) \equiv 0 \ \forall x \Rightarrow y(x) = x$

(o $1+xy=0$ che non può verificare $x=y=1$)