COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 3 febbraio 2018 - PARTE A[1]

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile tale $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 3$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$. Sia $\vec{v} = \vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}}$. Si chiarisca come mai esiste la derivata direzionale $f'(0,0)(\vec{v})$ e si calcoli esplicitamente tale derivata (3p.)

se f è differenziabile in $x_0 \Rightarrow f'(x_0)(\vec{v})$ è lineare in $\vec{v}$. IN QUESTO CASO

$f'(0)(\vec{i}-\vec{j}) = f'(0)(\vec{i}) - f'(0)(\vec{j}) = \frac{\partial f}{\partial x}(0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0) = 3+(-1) = 4$

2. Dato l'insieme $M := \{(x,y,z) : xyz = 1, 2x+3y+z = 0\}$ in $\mathbb{R}^3$ e il punto $P_0) := (-1,1,-1)$ si mostri che $P_0 \in M$ e (usando il teorema delle funzioni implicite) che vicino al punto P_0 è possibile descrivere M mediante due funzioni $y(x)$ e $z(x)$ (si possono esplicitare y e z in termini di x) (3p.)

$M = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 0\}$ dove $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz-1 \\ 2x+3y+z \end{pmatrix}$. Dato che $g(-1,1,-1) = 0$ è chiaro che $P_0 = (-1,1,-1) \in M$. Calcolo la Jacobiano di g:

$\frac{\partial g}{\partial(xyz)} = \begin{pmatrix} yz, & xz, & xy \\ 2, & 3, & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial(xyz)}(P_0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2, & 3, & 1 \end{pmatrix}$. Dato che

il minore $\frac{\partial g}{\partial(yz)}(P_0) = \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante $\neq 0$, per Dini,

vicino a P_0, si può esplicitare x in termini di (y,z)

[1]PUNTEGGIO MINIMO VotoA≥5p. Voto=VotoA+VotoB (0 ≤ Voto ≤ 38) - Lode se Voto≥ 33

3. Si calcoli la lunghezza del grafico della funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2x^2$ (un arco di parabola) (3p.)

Se γ è il grafico di $f \Rightarrow \ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$. In questo caso

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+16x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} \sqrt{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{1+y^2}\,dy .$$

$$\int_0^4 \sqrt{1+y^2}\,dy = \int_0^4 \frac{1+y^2}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,dy + \int_0^4 y \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy =$$

$$= \Big[\operatorname{arcsinh}(y)\Big]_0^4 + \Big[y\sqrt{1+y^2}\Big]_0^4 - \int_0^4 \sqrt{1+y^2}\,dy = \operatorname{arcsinh}(4) + 4\sqrt{17} - \int_0^4 \sqrt{1+y^2}\,dy$$

DUNQUE $\int_0^4 \sqrt{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(4) + 2\sqrt{17} \Rightarrow$ $\ell(\gamma) = \boxed{\frac{\operatorname{arcsinh}(4)}{4} + \sqrt{17}}$

4. Si dica se il campo $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definito da $\vec{f}(x, y) := \frac{y}{x^2+y^2}\vec{\mathbf{i}} - \frac{x}{x^2+y^2}\vec{\mathbf{j}}$ è conservativo (2p.)

NON È CONSERVATIVO DATO CHE $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} \neq 0$ se $\gamma(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}$. $(0 \le t \le 2\pi)$

INFATTI $\gamma'(t) = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}$ e

$$\int_\gamma \vec{f}\, d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}\vec{i} - \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)}\vec{j}\right)\left(-\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}\right) dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (-\sin^2(t) - \cos^2(t))\,dt = \int_0^{2\pi} (-1)\,dt = -2\pi \neq 0$$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Se un campo $\vec{f}$ è solenoidale, allora $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(b) Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^2$, se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è differenziabile e se ∇f è identicamente nullo su Ω, allora f è costante in Ω $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$. (non è detto che Ω sia connesso)

(c) Se f è una funzione T-periodica avente derivata seconda continua, allora la serie di Fourier associata a f converge uniformemente a f $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(d) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile in senso improprio sul disco $B := \{x^2 + y^2 < 1\}$, allora $|f|$ è integrabile in senso improprio su B. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

1. Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) := 4x^4 + 4xy + 2y^2$ e l'insieme $M := \{(x,y) : (x+y)^2 = 1\}$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (3p.).

   $(x,y) =$ (0,0) punto di SELLA $(x,y) =$ ______ punto di ______

   $(x,y) =$ (1/2,-1/2) punto di MINIMO $(x,y) =$ (-1/2,1/2) punto di MINIMO

   (b) Si dica se M è regolare (0,5p.) ☒ SI ☐ NO e se è limitato (0,5p.) ☐ SI ☒ NO.

   (c) Si dica se f ha massimo/minimo su M e in caso affermativo si calcolino tali valori (2p.):

   $\min_M f =$ 7/4 ☐ non esiste / $\max_M f =$ ______ ☒ non esiste

Svolgimento

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 16x^3 + 4y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x + 4y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 48x^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$$

PTI CRITICI $\begin{cases} 16x^3 + 4y = 0 \\ 4x + 4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ 4x^3 - x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} y = -x \\ 4x^2 = 1 \end{cases}$

DUNQUE HO TRE PTI: $(0,0)$ $\pm\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ determinante $-16 < 0 \Rightarrow$ SELLA

$Hf\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = Hf\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ determinante $= 32 > 0$, $a_{11} = 12 > 0 \Rightarrow$ MINIMI

• $M = \{g(x,y) = 0\}$ dove $g(x,y) = (x-y)^2 - 1 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = -2(x-y) = \frac{\partial g}{\partial y}$

Allora $\nabla g(x,y) = 0 \iff x = y$. Ma se $x = y \Rightarrow g(x,y) = -1 \neq 0$

Dunque non ci sono punti in M con $\nabla g = 0$. $\Rightarrow M$ è regolare

M si può esplicitare: $M = \{x - y = 1\} \cup \{x - y = -1\}$ = unione di due rette $\Rightarrow M$ non è limitato (per esempio i punti $(n, n-1) \in M$ e non sono limitati.

• Cerco i punti stazionari di f su M:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 16x^3 + 4y = 2\lambda(x+y) \\ 4x + 4y = 2\lambda(x+y) \\ (x+y)^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2 \text{ (perché } x+y \neq 0) \\ 16x^3 + \cancel{4y} = 4x + \cancel{4y} \\ (x+y)^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ x = 0 / 16x^2 = 1 \\ (x+y)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} \lambda = 2 \\ x = 1/2 \\ y = \pm 1 - \frac{1}{2} = \left\langle \begin{matrix} 1/2 \\ -3/2 \end{matrix} \right. \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} \lambda = 2 \\ x = -1/2 \\ y = \pm 1 + \frac{1}{2} = \left\langle \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \right. \end{cases} \iff$$

$\pm(0,1) \to f$ vale 2

$\pm\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \to f$ vale $\frac{7}{4}$

$\pm\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \to f$ vale $\frac{7}{4}$

NOTIAMO CHE $(x,y) \in M \iff y = -x \pm 1$ da cui $\substack{(x,y)\in M \\ \|(x,y)\| \to \infty} \Rightarrow x \to +\infty$

INOLTRE $f(x,y) \geq 4x^4 - 2x^2 - 2y^2 + 2y^2 = 4x^4 - 2x^2$ e quindi

$$\lim_{\substack{(x,y)\in M \\ \|(x,y)\| \to \infty}} f(x,y) \geq \lim_{x \to +\infty} 4x^4 - 2x^2 = +\infty .$$

NE SEGUE CHE f NON HA MASSIMO su M e f HA MINIMO su M

$\Rightarrow$ il punto di minimo è uno dei punti trovati sopra $\Rightarrow$

$$\min_M f = \frac{7}{4}$$

2. Si considerino l'insieme S e il campo vettoriale $\vec{f}$ definiti da:

$$S := \{(x, y, x) : x^2 - y^2 - z^2 = 1, 0 \leq x \leq 2\}, \quad \vec{f}(x, y, z) := x\sqrt{1 + y^2 + z^2}\vec{\mathbf{i}} + x\sqrt{x^2 + z^2}\vec{\mathbf{j}} - x^2y^2\vec{\mathbf{k}}.$$

(a) Si trovi una parametrizzazione Γ che rende S (sostegno di) una superficie regolare avente normale $\vec{\nu}$ concorde con il versore $-\vec{\mathbf{i}}$. (1p.)

$\Gamma(u, v) =$ $\boxed{\left(\sqrt{1+u^2+v^2}, v, u\right)}$

per $(u, v) \in$ $\boxed{\{u^2+v^2 \leq 3\}}$.

(b) Si descriva il bordo di S con una curva regolare γ avente verso coerente con $\vec{\nu}$ (1p).

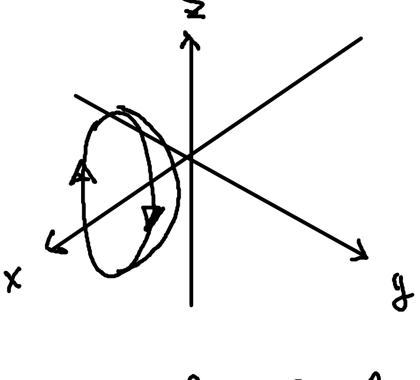
$\gamma(t) =$ $\boxed{2\vec{i} + \sqrt{3}\sin(t)\vec{j} + \sqrt{3}\cos(t)\vec{k}}$

per $t \in$ $\boxed{[0, 2\pi]}$.

(c) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso S (con la normale detta sopra) (4p.)

$$\int_S \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \boxed{-\frac{15}{2}\pi}$$

Svolgimento



a) $(x,y,z) \in S \iff x^2 = 1 + y^2 + z^2,\ 0 \leq x \leq 2 \iff$

$x = \pm\sqrt{1+y^2+z^2},\ 0 \leq x \leq 2 \iff$

$x = \sqrt{1+y^2+z^2},\ y^2+z^2 \leq 3$ Posso allora

vedere S come grafico $x = g(y,z)$ dove

$g(u,v) = \sqrt{1+u^2+v^2}$ con $(u,v) \in B = \{u^2+v^2 \leq 3\}$

Con questa scelta la normale è $\begin{pmatrix} 1 \\ -g_u \\ -g_v \end{pmatrix}$ concorde con $\vec{i}$. Allora inverto u e v

e prendo $\Gamma(u,v) = \sqrt{1+u^2+v^2}\,\vec{i} + v\,\vec{j} + u\,\vec{k}$.

b) ∂B è descritto dalla curva $\gamma(t)=\sqrt{3}(\cos(t), \sin(t))$ (coerente con B) $0 \le t \le 2\pi$. $\Rightarrow$ descrivo $\Sigma(S)$ con $\Gamma(\gamma(t)) = \sqrt{1+3\cos^2(t)+3\sin^2(t)}\,\vec{i} + \sqrt{3}\sin(t)\,\vec{i} + \sqrt{3}\cos(t)\,\vec{k} = 2\vec{i} + \sqrt{3}\sin(t)\,\vec{j} + \sqrt{3}\cos(t)\,\vec{k}$

c) Voglio usare il teorema della divergenza su

$\Omega = \{ y^2+z^2 \le 1,\ \sqrt{1+y^2+z^2} \le x \le 2 \}$ che ha come bordo $S \cup B$,

dove $B = \{ (2,y,z) : y^2+z^2 \le 3 \}$. NOTIAMO che la normale a $\partial\Omega$ USCENTE è discorde da $\vec{i}$ e quindi è quella detta sopra.

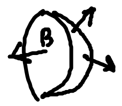
Si ha

$$\mathrm{div}(\vec{f}) = \sqrt{1+y^2+z^2} \Rightarrow \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\,\vec{f} = \iint_{\{y^2+z^2\le 3\}} \left(\int_{\sqrt{1+y^2+z^2}}^{2} \sqrt{1+y^2+z^2}\,dx \right) dy\,dz =$$

$$\iint_{\{(y^2+z^2)\le 3\}} \left(2-\sqrt{1+y^2+z^2}\right)\sqrt{1+y^2+z^2}\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \left(2-\sqrt{1+\rho^2}\right)\sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho =$$

$$2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(2\sqrt{1+\rho^2} - 1 - \rho^2\right)\rho\,d\rho = \pi \int_0^3 \left(2\sqrt{1+s} - 1 - s\right) ds = \pi \left[\frac{4}{3}(1+s)^{3/2} - s - \frac{s^2}{2} \right]_0^3 =$$

$$\pi \left(\frac{4}{3}\cdot 8 - \frac{4}{3} - 3 - \frac{9}{2} \right) = \frac{\pi}{6}\left(64 - 8 - 18 - 27 \right) = \frac{11}{6}\pi$$



INOLTRE

$$\iint_B \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iint_{\{y^2+z^2\le 3\}} f_1(2,y,z)\,dy\,dz = \iint_{\{y^2+z^2\le 3\}} 2\sqrt{1+y^2+z^2}\,dy\,dz =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} 2\sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho = 2\pi \int_0^3 \sqrt{1+s}\,ds = 2\pi \left[\frac{2}{3}(1+s)^{3/2} \right]_0^3 = \frac{4\pi}{3}(8-1) = \frac{28}{3}\pi$$

$(\vec{N} = -\vec{\nu})$

DUNQUE

$$\frac{11}{6}\pi = \iint_B \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma + \iint_S \vec{f}\cdot\vec{N}\,d\sigma = \frac{28}{3}\pi + \iint_S \vec{f}\cdot\vec{N}\,d\sigma \Rightarrow$$

$$\iint_S \vec{f}\cdot\vec{N}\,d\sigma = \left(\frac{11}{6} - \frac{28}{3} \right)\pi = (11-56)\pi = -\frac{45}{6}\pi = -\frac{15}{2}\pi$$

3. (☐ scelgo di fare l'esercizio alternativo essendo iscritto prima dell'a.a. 2015-16)

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3y \\ z' = -2x + 3y + 3z \end{cases}$$

(a) Chiamiamo A la matrice associata al sistema e J la forma di Jordan di A. Si trovi il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ e si verifichi che p ha due radici λ_1 e λ_2 di cui $\lambda_2 = 1$. Si scrivano: (4p.):

$p(\lambda) = \boxed{(3-\lambda)^2(1-\lambda) = 9 - 15\lambda + 7\lambda^2 - \lambda^3}$ $\lambda_1 = \boxed{3}$

$(A - \lambda_1 I) = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}}$, $(A - \lambda_1 I)^2 = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}}$,

$J = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$, $e^{tJ} = \boxed{\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}}$,

(b) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$ (3p.)

$x(t) = \boxed{e^{3t}}$

$y(t) = \boxed{e^{3t}}$

$z(t) = \boxed{t\, e^{3t}}$

Svolgimento

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & 3 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2(1-\lambda)$

$B := A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (ha rango 2 e dim Ker $=1$).

$B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ (ha rango 1 e dim Ker $= 2$)

$\Rightarrow$ la molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 3$ è 2

dato che la molt. algebrica di $\lambda_1 = 3$ è 2 $\Rightarrow$ dim Ker $B^k = 2$ $\forall k \geq 2$

Inoltre se $B' = A - I$, deve essere dim Ker $(B')^k = 1$ $\forall k \geq 1$

• Cerco $e_3 \in \operatorname{Ker} B^2 \setminus \operatorname{Ker} B$. Se $e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la condizione $e_3 \in \operatorname{Ker} B^2$ significa $\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ 0 = 0 \\ -4x + 4y = 0 \end{cases} \iff \operatorname{Ker} B^2 = \{x = y\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ (HA DIMENS. 2)

Se $e_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ $Be_3 = \begin{pmatrix} -2\alpha + 2\alpha \\ 0 \\ -2\alpha + 3\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$, se voglio $Be_3 \neq 0$ posso prendere $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

da cui $e_2 = Be_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Quindi e_2 è un autovettore rispetto a $\lambda=3$ ed e_3 è l'autovettore generalizzato con $(A-3I)e_3 = e_2$.

Infine cerco e_1 con $B'e_1 = 0$ (cioè un autovettore rispetto a $\lambda_1 = 1$) $\Rightarrow$

$(A-I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&2&0\\0&2&0\\-2&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}2y=0\\2y=0\\-2x+3y+2z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\x=z\end{cases}$

posso prendere $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. IN QUESTO MODO prendo $M = (e_1, e_2, e_3)$, cioè

$M = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ (tale che $M\hat{e}_1 = e_1$, $M\hat{e}_2 = e_2$, $M\hat{e}_3 = e_3$, $\hat{e}_i$ ← BASE CANONICA)

e si ha $A = MJM^{-1}$ con $J = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix} \Rightarrow e^{tJ} = \begin{pmatrix}e^t&0&0\\0&e^{3t}&te^{3t}\\0&0&e^{3t}\end{pmatrix}$

(se scambio gli autovettori trovo $J = \begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ e $M = \ldots$ – VA BENE LO STESSO)

Se cerco la soluzione con $Y(0) = Y_0 =: \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ NOTO CHE $Y_0 = e_3$.

Dato che $M\hat{e}_3 = e_3$ ho $M^{-1}Y_0 = M^{-1}e_3 = \hat{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Per la formula

$Y(t) = e^{tA}Y_0 = Me^{tJ}M^{-1}Y_0 = Me^{tJ}\hat{e}_3 = M\begin{pmatrix}0\\te^{3t}\\e^{3t}\end{pmatrix} =$

$e^{3t}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\t\\1\end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{3t}\\e^{3t}\\te^{3t}\end{pmatrix}$

4. Si consideri l'equazione differenziale

$$xy'' - y' - y = 0$$

Si cerchino le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ mediante una serie di potenze $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Si risponda in particolare ai sequenti quesiti.

(a) Si scriva una formula ricorsiva per i coefficienti a_n (2p.)

$\boxed{(n^2-1)a_{n+1} = a_n \quad \forall n \geq 0 \quad \text{OPPURE} \quad a_0 = a_1 = 0 \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n^2-1} \quad \forall n \geq 2}$ $(\mathcal{R})$

(b) Esiste una soluzione y con $y(0) = 1$ [SI] [~~NO~~] (1p.).

(c) Esiste un'unica soluzione y con $y''(0) = 4$ [~~SI~~] [NO] (1p).

(d) Se la risposta la punto c) è positiva si trovi il raggio di convergenza della serie che definisce $y(x)$:

$R = \boxed{+\infty}$ (1p.) e si dica quanto fa $y'''(0) = \boxed{4}$ (1p.).

Svolgimento

Se $y = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{1}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$,

$$y'' = \sum_{2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} \Rightarrow xy'' = \sum_{2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-1} = \sum_{1}^{\infty} a_{n+1}(n+1) n x^n$$

$\uparrow$ anche 0

$$0 = xy'' - y' - y = \sum_{0}^{\infty} \left[a_{n+1} n(n+1) - a_{n+1}(n+1) - a_n \right] x^n = \sum_{0}^{\infty} \left(a_{n+1}(n^2-1) - a_n \right) x^n$$

Ne ricavo $\quad a_{n+1}(n^2-1) = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Se metto $n=1$ trovo $a_2 \cdot 0 = a_1 \Rightarrow \boxed{a_1 = 0}$; se metto $n=0$

trovo $\underset{\shortparallel 0}{a_1} \cdot (-1) = a_0 \Rightarrow a_0 = 0$. DUNQUE $a_0 = a_1 = 0$

Ne segue che le soluzioni devono avere $y(0) = y'(0) = 0$

(non esiste sol. con $y(0) = 1$) e sotto queste condizioni ricavo

$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n^2-1} \quad \forall n \geq 2$. Se fisso $a_2 = \dfrac{y''(0)}{2}$ la relazione

individua univocamente $y(x)$

Se parto da $y''(0) = 4$ deve essere $a_2 = \frac{4}{2} = 2$ da cui

$a_3 = \dfrac{a_2}{4-1} = \dfrac{a_2}{3} = \dfrac{2}{3}$ e quindi $y'''(0) = 3!\, a_3 = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$

Per trovare il raggio di convergenza basta calcolare

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso } R}}{=} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n^2-1} \right| = 0 \Rightarrow R = \frac{1}{L} = +\infty$$

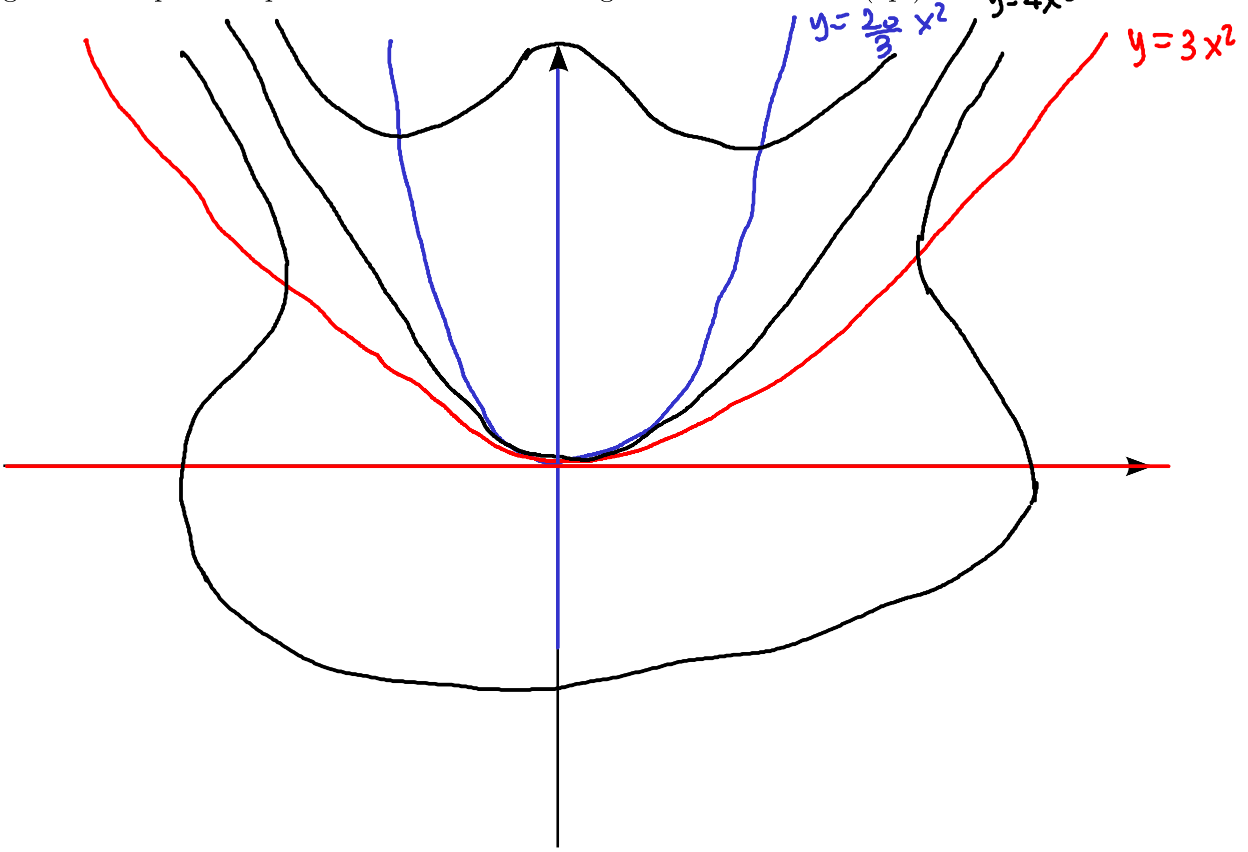
Ingegneria Aerospaziale, Compito del 3 febbraio 2018 - PARTE B   Cognome/Nome:

Variante esercizio 3 della seconda parte: gli iscritti precedentemente al 2015-16 possono scegliere tra questo e il precedente.

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{y(3y-20x^2)}{4x(y-3x^2)}$$

1. Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).



2. Si trovi un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x, y) = \lambda(xy)$ (2,5p.). Si trovi poi un integrale primo Φ (2,5p.).

$\lambda(x, y) = \boxed{x^2 y^2}$, $\Phi(x, y) = \boxed{x^3 y^3 (y - 4x^2)}$

3. Si trovi la soluzione $y(x)$ relativa al dato iniziale $(1, 4)$, e se ne riporti il grafico nel diagramma della pagina precedente (1p.)

.

$y(x) = \boxed{4x^2}$

Svolgimento

Vediamo dove si annullano numeratore e denominatore di $-\dfrac{y(3y-20x^2)}{4x(y-3x^2)}$ $\leftarrow A(x,y)$ $\leftarrow B(x,y)$

$A(x,y)=0 \iff y=0$ oppure $y=\frac{20}{3}x^2$ (linea blu)

$B(x,y)=0 \iff x=0$ oppure $y=3x^2$ (linea rosso)

Cerco il fattore integrante $\lambda(x,y)=\lambda(xy)$. Deve essere

$\frac{\partial}{\partial y}\lambda(xy)A(xy) = \frac{\partial}{\partial x}\lambda(xy)B(xy) \iff x\lambda'(xy)y(3y-20x^2)+\lambda(xy)(6y-20x^2) =$

$y\lambda'(xy)4x(y-3x^2)+\lambda(xy)(4y-36x^2) \iff$

$xy\lambda'(xy)(-y-8x^2) = \lambda(xy)(2y+16x^2) \iff xy\lambda'(xy) = 2\lambda(xy)$

Dunque $\lambda'(t)=\frac{2}{t}\lambda(t) \iff \lambda(t)=c\,t^2$. Posso prendere $c=1$ e

$\lambda(xy)= x^2y^2$. Cerco ϕ:

$\frac{\partial}{\partial x}\phi = x^2y^2A(x,y) = 3x^2y^4-20x^4y^3 \Rightarrow \phi = x^3y^4-4x^5y^3+c(y)$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\phi = 4x^3y^3-12x^5y^2+c'(y)$ che deve essere $x^2y^2B(x,y) = 4x^3y^3-12x^5x^2$

e quindi $c'=0$, $c=$ costante posso prendere $c=0$ e

$$\phi(x,y) = x^3y^4-4x^5y^3 = x^3y^3(y-4x^2)$$

c) se parto da $(1,4)$ ho $\phi(1,4) = 1^3 4^3(4-1)=0$

dunque $\phi(x,y(x))=0 \iff x^3y(x)^3(y(x)-4x^2)=0$ da cui

$y(x)=4x^2$