COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 13 gennaio 2018 - PARTE A[1]

1. Si enunci il teorema di Schwartz (sulla "simmetria" delle derivate seconde) (2p.)

Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto e se esistono $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ per ogni $x \in \Omega$ tali che $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sono continue in un punto $x_0 \in \Omega$, ALLORA

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \forall i,j = 1 \dots N$$

2. Si mostri che $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1, x + y + z = 0\}$ è un insieme regolare di codimensione 2 in $\mathbb{R}^3$ (3p.)

Chiamo $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz-1 \\ x+y+z \end{pmatrix}$ di modo che $M = \left\{ g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Calcolo lo Jacobiano di g : $J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Se M non è regolare in $(x,y,z) \in M \Rightarrow J_g(x,y,z)$ ha rango < 2 (*) cioè tutti i minori 2×2 hanno determinante zero. Dunque in un tale punto

$$\begin{cases} (y-x)z = 0 \\ (z-x)y = 0 \\ (x-y)z = 0 \\ xyz = 1 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$$

Dalla IV° riga $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ dunque dalle prime tre righe $x = y = z$. Dalla V^a riga $\Rightarrow \underline{x = y = z = 0}$.

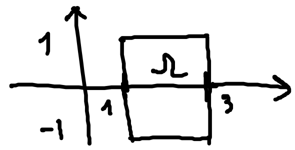
MA QUESTO È IMPOSSIBILE PERCHÉ $xyz = 1$

Dunque non ci sono punti di questo tipo $\Rightarrow$ M è regolare

(*) Sto usando il teorema delle funz. implicite.

[1] PUNTEGGIO MINIMO VotoA$\geq$5p. Voto=VotoA+VotoB ($0 \leq$ Voto ≤ 40) - Lode se Voto≥ 35

3. Sia $\Omega := \{1 < x < 3, -1 < y < 1\}$ e sia $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ il campo definito da $\vec{f}(x,y) := \dfrac{-\vec{\mathbf{i}}y + \vec{\mathbf{j}}x}{x^2+y^2}$. Si provi che $\vec{f}$ è conservativo (in Ω). (3p.).



Ω è convesso dunque è semplicemente connesso

Basta dunque verificare che $\vec{f}$ è irrotazionale

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-(x^2+y^2)+y\,2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

SONO EGUALI

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-x\,2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

TORNA

4. Si trovi il minimo della funzione $f(x,y) := x^2 + 4y^2$ sull'insieme $P := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 5 + x\}$ (si può dare per buono che tale minimo esiste). (3p.)

Si ha $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}$. L'unico pto stazionario di f è $(0,0)$ MA $(0,0) \notin P$

Allora devo cercare i punti stazionari vincolati a $\partial P = \{y = 5+x\}$.

Posto $g(x,y) = y-5-x$ si ha $M = \{g(x,y)=0\}$ e $\nabla g = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. DUNQUE

$$\begin{cases} 2x = -\lambda \\ 8y = \lambda \\ y = 5+x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2x \\ 2x+8y=0 \\ y = 5+x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2x \\ x = -4y \\ y = 5-4y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$$

C'È SOLO UN PUNTO CHE RISOLVE IL SISTEMA

Se diamo per buono che il minimo esiste $\Rightarrow$ $(-4,1)$ deve essere pto di min.

$$\Rightarrow \min_P f = f(-4,1) = 16+4 = \boxed{20}$$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Se $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ è una curva di classe $\mathcal{C}^1$, allora la lunghezza di γ è definita da $\ell(\gamma) = \int_0^1 \gamma'(t)\,dt$. [VERO] [~~FALSO~~].

(b) Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è differenziabile in un punto $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^M$ è un aperto), allora f è continua in $\mathbf{x}_0$. [~~VERO~~] [FALSO].

(c) La serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{nx^n}{1+n^2}$ converge uniformemente su $[-1,1]$ [VERO] [~~FALSO~~].

(d) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e positiva, allora esiste sempre $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x)\,dx \in [0,+\infty]$. [~~VERO~~] [FALSO].

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 13 gennaio 2018 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x,y) := 3x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 12xy^3 + 6y^4 - 8y^3 + 2y^2 + 24y$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (6p.).

   $(x,y) =$ $(1,-1)$ punto di MINIMO $(x,y) =$ $(-1,1)$ punto di SELLA

   $(x,y) =$ $(6,-6)$ punto di SELLA $(x,y) =$ ______ punto di ______

Svolgimento

$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^3 + 12x^2y + 12xy^2 + 12y^3 = 12(x+y)(x^2+y^2)$. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff x+y=0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^3 + 12x^2y + 36xy^2 + 24y^3 - 24y^2 + 4y + 24$

DUNQUE I PTI STAZ. DEVONO VERIFICARE $y=-x$. Metto questa condizione

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,-x) = 0 \iff 4x^3 - 12x^3 + 36x^3 - 24x^3 - 24x^2 - 4x + 24 = 0 \iff$

$4x^3 - 24x^2 - 4x + 24 = 0 \iff x^3 - 6x^2 - x + 6 = 0$ vedo che 1 è radice

e se uso Ruffini trovo che le radici sono $1, -1, 6 \Rightarrow$

I PTI STAZ. SONO $\boxed{(1,-1) \quad (-1,1) \quad (6,-6)}$. Calcolo le der. seconde

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 36x^2 + 24xy + 12y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,-x) = 36x^2 - 24x^2 + 12x^2 = 24x^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12x^2 + 24xy + 36y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,-x) = 12x^2 - 24x^2 + 36x^2 = 24x^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12x^2 + 72xy + 72y^2 - 48y + 4$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,-x) = 12x^2 - 72x^2 + 72x^2 + 48x + 4 = 12x^2 + 48x + 4$. DUNQUE

$H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 24 & 24 \\ 24 & 64 \end{pmatrix}$ DETERMINANTE > 0, $a_{11} > 0 \Rightarrow$ MINIMO

$H_f(-1,1) = \begin{pmatrix} 24 & 24 \\ 24 & -32 \end{pmatrix}$ DETERMINANTE $< 0 \Rightarrow$ SELLA

$H_f(6,-6) = \begin{pmatrix} 24\cdot 6^2 & 24\cdot 6^2 \\ 24\cdot 6^2 & 12\cdot 6^2 + 48\cdot 6 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24\cdot 36 & 24\cdot 36 \\ 24\cdot 36 & 8\cdot 36 + 4 \end{pmatrix}$

DETERMINANTE < 0 SELLA

2. Si consideri l'insieme S descritto dalla parametrizzazione $\Gamma(\theta,t) := \sqrt{t}(\cos(\theta)\vec{\mathbf{i}}+\sin(\theta)\vec{\mathbf{j}})+t\vec{\mathbf{k}}$, $0 \le \theta \le \pi$, $1 \le t \le 2$.

   (a) Si verifichi che $\dfrac{\partial\Gamma}{\partial\theta} \otimes \dfrac{\partial\Gamma}{\partial t} \neq 0$ in S (dunque S è una superficie) (1p.)
   (b) Si calcoli l'area di S (2p.).
   (c) Si calcoli il flusso del campo $\vec{f}(x,y,z) := \left(\dfrac{y\vec{\mathbf{i}}-x\vec{\mathbf{j}}}{x^2+y^2}+\vec{\mathbf{k}}\right)$ attraverso S (dove la normale è determinata dalla parametrizzazione) (2p.).

Svolgimento

$$\frac{\theta}{\partial\theta}\Gamma(\theta,t) = \sqrt{t}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Gamma(\theta,t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{t}}\cos\theta \\ \frac{1}{2\sqrt{t}}\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\theta}{\partial\theta}\Gamma \otimes \frac{\partial}{\partial t}\Gamma = \det\begin{vmatrix} i & \sqrt{t}(-\sin\theta) & \frac{1}{2\sqrt{t}}\cos\theta \\ j & \sqrt{t}\cos\theta & \frac{1}{2\sqrt{t}}\sin\theta \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\sqrt{t}\cos\theta\,\vec{i} + \sqrt{t}\sin\theta\,\vec{j} - \frac{\vec{K}}{2} = \vec{N}(\theta,t)$$

VEDIAMO ALLORA CHE:

$$\|\vec{N}(\theta,t)\| = \sqrt{t+\frac{1}{4}} \neq 0$$

- L'AREA DI S è data da

$$A(S) = \int_0^{\pi}\int_1^2 \|\vec{N}(\theta,t)\|\,d\theta\,dt = \pi\int_1^2 \sqrt{t+\frac{1}{4}}\,dt = \pi\left[\frac{2}{3}\left(t+\frac{1}{4}\right)^{3/2}\right]_1^2$$

$$= \frac{2}{3}\pi\left(\left(2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1+\frac{1}{4}\right)^{3/2}\right) = \frac{2}{3}\pi\left(\left(\frac{9}{4}\right)^{3/2} - \left(\frac{5}{4}\right)^{3/2}\right) = \frac{2}{3}\pi\left(\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3\right) =$$

$$\frac{2}{3}\pi\left(\frac{27}{8} - \frac{\sqrt{125}}{8}\right) = \boxed{\frac{\pi}{12}\left(27-\sqrt{125}\right.}$$

$$\cdot \iint_S \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\sigma = \int_0^{\pi} \int_1^{2} \vec{f}(\Gamma(\theta, t)) \cdot \vec{N}(\theta, t) \, d\theta \, dt =$$

$$\int_0^{\pi} \int_1^{2} \left\{ \underbrace{\frac{\sqrt{t} \sin\theta \, \vec{i} - \sqrt{t}\cos\theta \, \vec{j}}{t\cos^2\theta + t\sin^2\theta} \cdot \left(\sqrt{t}\cos\theta \, \vec{i} + \sqrt{t}\sin\theta \, \vec{j} \right)}_{=0} + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right\} d\theta \, dt$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\theta \int_1^{2} dt = \boxed{-\frac{\pi}{2}}$$

3. Si consideri la serie di potenze definita da $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

(a) Si calcoli il raggio di convergenza della serie (1p.), indicato nel seguito con R.

(b) Si calcoli $f''(0) = \boxed{\frac{1}{3}}$ (1p.).

(c) Si mostri che vale la relazione(2p.):

$$\frac{d^2}{dx^2}(xf(x)) = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \text{ con } |x| < R.$$

(d) Usando la relazione precedente, si provi che $f(x) = 1 - \ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x}$ (2p.).

Svolgimento

$R^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1 \Rightarrow R = 1$

$f''(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n(n+1)} x^{n-2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1} x^{n-2} \Rightarrow f''(0) = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$

pongo $g(x) = xf(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. Allora $g'(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n(n+1)} =$ $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; $g''(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n} = \sum_{1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{0}^{\infty} x^n =$ serie geometrica $= \frac{1}{1-x}$ DUNQUE $g''(x) = \frac{1}{1-x}$!!

NOTIAMO CHE $g(0) = 0$ e $g'(0) = 0$ (perché $g'(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$).

Allora $g'(x) = g'(0) + \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \left[-\ln(1-t)\right]_0^x = -\ln(1-x)$

$g(x) = g(0) + \int_0^x -\ln(1-t)\,dt = -\left[t\ln(1-t)\right]_0^x + \int_0^x t\,\frac{-1}{1-t}\,dt =$

$-x\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t}{1-t}\,dt = -x\ln(1-x) + \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1-t}\right)dt =$

$-x\ln(1-x) + x + \left[\ln(1-t)\right]_0^x = -x\ln(1-x) + x + \ln(1-x)$.

Dato che $g(x) = x\,f(x)$ si ricava

$f(x) = 1 + \frac{\ln(1-x)}{x} - \ln(1-x)$

4. $\left(\square \right.$ scelgo di fare l'esercizio alternativo essendo iscritto prima dell'a.a. 2015-16 $\left. \right)$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y \\ z' = y + 2z \end{cases}$$

(a) Chiamiamo A la matrice associata al sistema e J la forma di Jordan di A. Si trovi il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ e si verifichi che p ha un'unica radice $\hat{\lambda}$. Si scrivano: (5p.):

$p(\lambda) = \boxed{-\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (2-\lambda)^3}$ $\hat{\lambda} = \boxed{2}$

$(A - \hat{\lambda}I) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$, $(A - \hat{\lambda}I)^2 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$,

$J = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$, $e^{tJ} = \boxed{e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$,

(b) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$ (3p.)

$x(t) = \boxed{(t+1)\, e^{2t}}$

$y(t) = \boxed{t\, e^{2t}}$

$z(t) = \boxed{\frac{t^2}{2}\, e^{2t}}$

Svolgimento

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix} \qquad P(\lambda)=\det\begin{pmatrix}3-\lambda&-1&0\\1&1-\lambda&0\\0&1&2-\lambda\end{pmatrix}=(2-\lambda)\det\begin{pmatrix}3-\lambda&-1\\1&1-\lambda\end{pmatrix}=$$

$$(2-\lambda)(3-3\lambda-\lambda+\lambda^2+1)=(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4)=(2-\lambda)^3$$

$$B:=A-2I=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix} \qquad B^2=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

(B^3 deve fare 0). Cerco e_3 con $B^2e_3\neq\vec{0}$. Per esempio posso prendere $\boxed{e_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}$ $\left(B^2e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$. Allora prendo

$$e_2=Be_3=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=e_2}$$

e e_1 con $Be_2=e_1 \iff$

$B^2e_3=e_1 \Rightarrow \boxed{e_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}$. Questi tre vettori mi danno la base in cui A si rappresenta mediante $J=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

(il fatto che J abbia questa forma dipende dal fatto che $B^2\neq 0$ dunque esiste un solo autovettore, che è e_1).

Dalla Teoria svolta segue che $e^{tJ}=\begin{pmatrix}e^{2t}&te^{2t}&\frac{t^2}{2}e^{2t}\\0&e^{2t}&te^{2t}\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix}$. Inoltre posto $M=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ si ha $A=MJM^{-1}$

da cui $e^{tA}=Me^{tJ}M^{-1}$. Se il punto iniziale è $Y_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=e_3$, allora la soluzione $Y(t)=e^{tA}Y_0=Me^{tJ}M^{-1}Y_0=Me^{tJ}M^{-1}e_3$.

Ricordiamo che $M\hat{e}_i=e_i$ ($\hat{e}_i$ = vettori della base canonica) dunque $M^{-1}e_i=\hat{e}_i$ DUNQUE. $M^{-1}e_3=\hat{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Ne segue

$$Y(t)=Me^{tJ}\hat{e}_3=e^{2t}M\begin{pmatrix}1&t&t^2/2\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}t^2/2\\t\\1\end{pmatrix}=$$

$$e^{2t}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t^2/2\\t\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t+1\\t\\t^2/2\end{pmatrix}e^{2t}$$

5. Variante esercizio 4 SOLO per gli iscritti prima del 2015-16 (che possono anche scegliere di fare l'altro) Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{x(x^2 - y^2 + 1)}{y(x^2 - y^2 - 1)}$$

(a) Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni negli assi cartesiani riportati di seguito (1p.).

(b) Si trovi un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x, y) = \lambda(x^2 + y^2)$. Si trovi poi un integrale primo $\Phi(x, y)$ (4p.).

$\lambda(x, y) = \boxed{e^{x^2+y^2}}$, $\Phi(x, y) = \boxed{e^{x^2+y^2}(x^2 - y^2)}$.

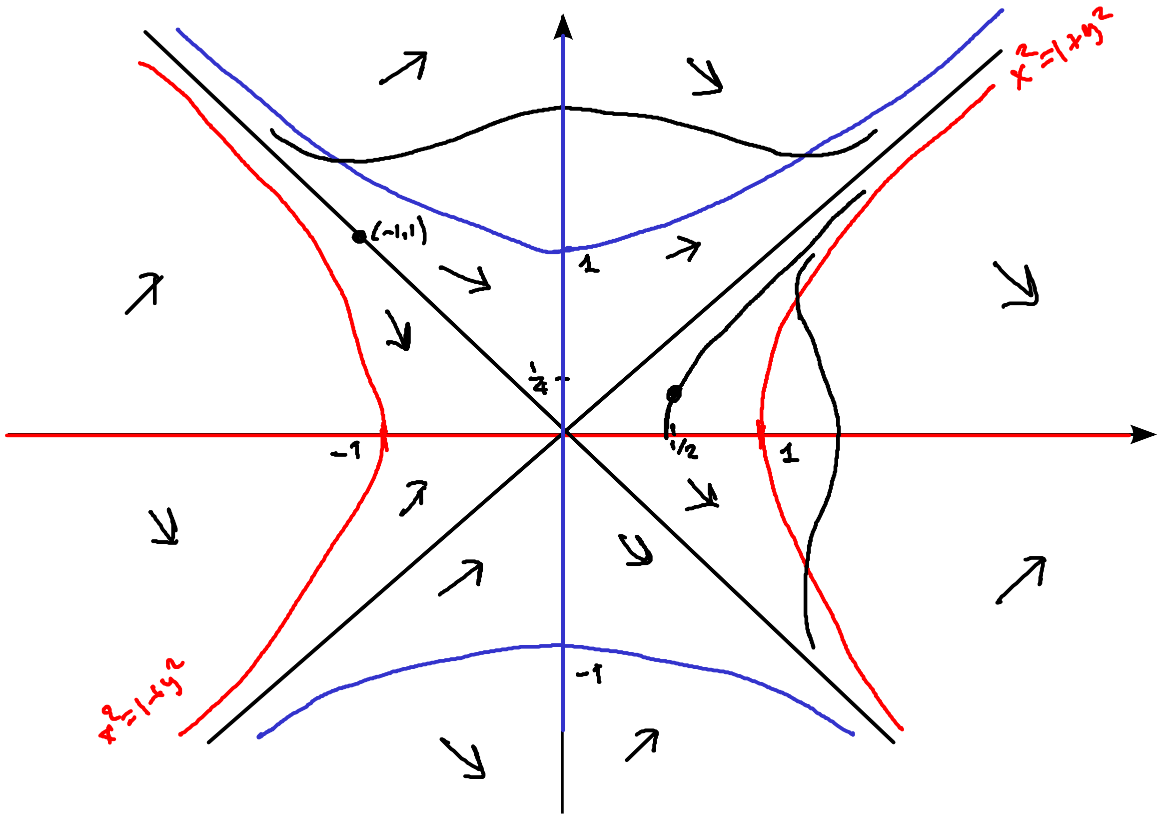
(c) Si trovi la soluzione $y(x)$ relativa al dato iniziale $(-1, 1)$, e se ne riporti il grafico negli assi cartesiani che seguono (1p.)

$y(x) = \boxed{-x}$.

(d) Si tracci il grafico qualitativo della soluzione $y(x)$ con dato iniziale $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. In particolare, se $]\underline{x}, \overline{x}[$ è l'intervallo massimale di esistenza di $y(x)$, si trovino (2p.)

$\overline{x} = \boxed{+\infty}$, $\lim_{x\to\overline{x}^-} y(x) = \boxed{+\infty}$

Svolgimento



$$\frac{\partial}{\partial y}\lambda(x^2+y^2)\,x\,(x^2-y^2+1) = \frac{\partial}{\partial x}\lambda(x^2+y^2)\,y\,(x^2-y^2-1) \iff$$

$$2xy\,\lambda'(x^2+y^2)(x^2-y^2+1) + \lambda(x^2+y^2)(-2xy) = 2xy\,\lambda'(x^2+y^2)(x^2-y^2-1) + \lambda(x^2+y^2)(2xy) \iff$$

$$4xy\,\lambda'(x^2+y^2) = 4xy\,\lambda(x^2+y^2) \iff \lambda' = \lambda$$

DUNQUE $\lambda(t) = c\,e^t$ con $c \in \mathbb{R}$ POSSO PRENDERE

$\boxed{\lambda(x,y) = e^{x^2+y^2}}$. Cerco l'integrale primo ϕ

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = e^{x^2+y^2}x(x^2-y^2+1) \iff \phi(x,y) = \int e^{x^2+y^2}x(x^2-y^2+1)\,dx$$

(pongo $s=x^2$) $\iff \phi(x,y) = \frac{e^{y^2}}{2}\int e^s(s-y^2+1)\,ds =$

$$\frac{e^{y^2}}{2}\left(e^s.s - \cancel{\int e^s ds} - y^2\int e^s ds + \cancel{\int e^s ds}\right) = \frac{e^{y^2}}{2}\left(se^s - y^2e^s + c(y)\right) =$$

$$\frac{e^{y^2}}{2}(x^2-y^2)e^{x^2} + c(y) = \frac{(x^2-y^2)}{2}e^{x^2+y^2} + c(y).$$ TROVIAMO $c(y)$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y^2}{2}e^{x^2+y^2} + c(y)\right) = y(x^2-y^2)e^{x^2+y^2} - y\,e^{x^2+y^2} + c'(y) =$$

$$y(x^2-y^2-1)e^{x^2+y^2} + c'(y).$$ Dato che $\frac{\partial\phi}{\partial y} = y(x^2-y^2-1)e^{x^2+y^2}$

ho $c'=0 \Rightarrow c(y) =$ costante

POSSO PRENDERE $\phi(x,y) = e^{x^2+y^2}(x^2-y^2)$

(POSSO TOGLIERE $\frac{1}{2}$ ...)

. SE PARTO DA $(-1,1) \Rightarrow \phi(-1,1)=0$ DUNQUE

Deve essere $e^{x^2+y^2}(x^2-y^2)=0 \iff y=x$ oppure $y=-x$

Se la $y(x)$ passa per $(-1,1)$ deve essere $y(x)=-x$

. Se parto da $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ MI TROVO sotto $y(x)=x$ e SOPRA

le "zone rosse", in una regione in cui $y'>0$. DUNQUE

$y(x)$ è crescente, $y(x)<x$ fino a quando esiste

e non può mai toccare le curve rosse (perché in quella

regione le soluzioni escono dalle curve rosse in modo crescente)

$\Rightarrow$ $y(x)$ esiste per tutte le $x \geq \frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to\infty} y(x) = +\infty$