COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Esempio di primo compitino 2017 - PARTE A[1]

1. Sia $f(x,y,z) := (x+y+2z)e^{xz+1}$. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato nel punto $(1,1,-1)$. Si scriva il polinomio nelle variabili $(x-1)$, $(y-1)$ e $(z+1)$, senza sviluppare tutte le potenze di questi binomi. Si trovino inoltre $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(1,1,-1)$ e $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z^3}(1,1,-1)$ (3 p.):

   $P_{3,(1,1,-1)}(x,y,z) =$

   $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(1,1,-1) = \boxed{}$ $\qquad$ $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z^3}(1,1,-1) = \boxed{}$

2. Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definite da:

   $$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} z + \sin(xy) + 1 \\ x + y + e^{xyz} \end{pmatrix}, \qquad g(u,v) := \begin{pmatrix} uv \\ 3u - 2v \end{pmatrix}$$

   Posto $h(x,y,z) := g(f(x,y,z))$ si calcoli (2p.):

   $$\frac{\partial h_2}{\partial y}(0,0,0) = \boxed{}$$

3. Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è di classe $\mathcal{C}^2$ in Ω aperto di $\mathbb{R}^2$, se $\nabla f(x_0) = \mathbf{0}$, se λ_1, λ_2 sono gli autovalori di $H_f(\mathbf{x}_0)$ e se $\lambda_2 > \lambda_1 \geq 0$, allora posso dire che x_0 è un punto di minimo relativo per f (1p.) $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$.

4. Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è aperto se $\partial\Omega = \emptyset$ (1p.) $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$.

5. Se una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1([a,b])$ ha modulo costante, allora $\gamma'(t) = \vec{0}$ per ogni $t \in [a,b]$ (1p.) $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$.

6. Si provi che se f è differenziabile in un punto x_0, allora f è continua in x_0 (4p.).

   Svolgimento

[1] PUNTEGGIO MINIMO Voto A≥ 4; Voto A+Voto B≥ 10 Tempo: 1/2 ora per la parte A, 1 ora per la parte B

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x,y) := x^2 + y^2 + xy - 2\ln(1-xy)$.

   (a) Il dominio di f è $\boxed{}$ (1p.)

   (b) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (7p.).

   $(x,y) = \boxed{}$ punto di ______ $(x,y) = \boxed{}$ punto di ______

   $(x,y) = \boxed{}$ punto di ______ $(x,y) = \boxed{}$ punto di ______

   (c) Si dica se $M := \{(x,y) : f(x,y) \leq 0\}$ è limitato (2p.) $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$.

   Svolgimento

2. Si calcoli la lunghezza della curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\gamma(t) := \left(t\cos(t), t\sin(t), \sqrt{3}t \right)$$

$$\ell(\gamma) = \boxed{}$$

(7p.) *Svolgimento*

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 + x^2y^2 + y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si provi che f è differenziable in $(0,0)$ (6p.) e, se $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, si calcoli (1p.)

$$f'(0,0)(\vec{v}) = \boxed{}.$$

Svolgimento