COGNOME: | | | | | | | | | | | |

NOME: | | | | | | | | | | | |

MATR.: | | | | | |

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Esempio di primo compitino 2017 - PARTE A[1]

1. Sia $f(x,y,z) := (x+y+2z)e^{xz+1}$. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato nel punto $(1,1,-1)$. Si scriva il polinomio nelle variabili $(x-1)$, $(y-1)$ e $(z+1)$, senza sviluppare tutte le potenze di questi binomi. Si trovino inoltre $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(1,1,-1)$ e $\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(1,1,-1)$ (3 p.):

$$P_{3,(1,1,-1)}(x,y,z) = (x-1)+(y-1)+2(z+1)-(x-1)^2-(x-1)(y-1)-(x-1)(z+1)+(y-1)(z+1)+2(z+1)^2+\frac{(x-1)^3}{2}+\frac{(x-1)^2(y-1)}{2}+(x-1)^2(z+1)+\frac{(x-1)(z+1)^2}{2}+\frac{(y-1)(z+1)^2}{2}+(z+1)^3$$

SE $x=1+\alpha$, $y=1+\beta$, $z=-1+\gamma$ e $P:=(x,y,z)$, allora trovo $(1+\alpha+1+\beta+2(-1+\gamma))e^{(1+\alpha)(\gamma-1)+1}$

$$=(\alpha+\beta+2\gamma)e^{-\alpha+\gamma+\alpha\gamma}=(\alpha+\beta+2\gamma)\left(1+\alpha\gamma-\alpha+\gamma+\frac{(\alpha\gamma-\alpha+\gamma)^2}{2}+o(\|P\|^2)\right)=$$

$$(\alpha+\beta+2\gamma)\left(1-\alpha+\gamma+\alpha\gamma+\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\gamma^2-\alpha\gamma+o(\|P\|^2)\right)=(\alpha+\beta+2\gamma)\left(1-\alpha+\gamma+\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\gamma^2}{2}+o(\|P\|^2)\right)=$$

$$\alpha+\beta+2\gamma-\alpha^2-\alpha\beta-2\alpha\gamma+\alpha\gamma+\beta\gamma+2\gamma^2+\frac{\alpha^3}{2}+\frac{\alpha^2\beta}{2}+\alpha^2\gamma+\frac{\alpha\gamma^2}{2}+\frac{\beta\gamma^2}{2}+\gamma^3+o(\|P\|^3)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(1,1,-1) = \boxed{1} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(1,1,-1) = \boxed{6}$$

2. Siano $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definite da:

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} z+\sin(xy)+1 \\ x+y+e^{xyz} \end{pmatrix}, \qquad g(u,v) := \begin{pmatrix} uv \\ 3u-2v \end{pmatrix}$$

Posto $h(x,y,z) := g(f(x,y,z))$ si calcoli (2p.):

$$\frac{\partial h_2}{\partial y}(0,0,0) = \boxed{-2}$$

3. Se $f:\Omega \to \mathbb{R}$ è di classe $\mathcal{C}^2$ in Ω aperto di $\mathbb{R}^2$, se $\nabla f(x_0) = \mathbf{0}$, se λ_1, λ_2 sono gli autovalori di $H_f(\mathbf{x}_0)$ e se $\lambda_2 > \lambda_1 \geq 0$, allora posso dire che x_0 è un punto di minimo relativo per f (1p.) SI ~~NO~~.
LA COND. SUFF. È $\lambda_1>0$ $\lambda_2>0$
4. Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è aperto se $\partial\Omega = \emptyset$ (1p.) SI ~~NO~~ (deve essere $\partial\Omega \cap \Omega = \emptyset$)
5. Se una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1([a,b])$ ha modulo costante, allora $\gamma'(t) = \vec{0}$ per ogni $t \in [a,b]$ (1p.) SI ~~NO~~ VIENE $\gamma'(t) \perp \gamma(t)$ MA NON $\gamma'(t)=0$ — vedi la circonferenza
6. Si provi che se f è differenziabile in un punto x_0, allora f è continua in x_0 (4p.).

Svolgimento

$$J_f(x,y,z)=\begin{pmatrix} \cos(xy)\cdot y & \cos(xy)x & 1 \\ 1+yze^{xyz} & 1+xze^{xyz} & xye^{xyz} \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(x,y,z)(0,0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_g(u,v)=\begin{pmatrix} v & u \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad f(0,0,0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad J_g(1,1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

[1]PUNTEGGIO MINIMO Voto A$\geq$ 4; Voto A+Voto B$\geq$ 10 Tempo: 1/2 ora per la parte A, 1 ora per la parte B

$$J_h(0,0,0)=J_g(1,1)J_f(0,0,0)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial h_2}{\partial y}=-2$$

Ingegneria Aerospaziale, Esempio di primo compitino 2017 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) := x^2 + y^2 + xy - 2\ln(1 - xy)$.

   (a) Il dominio di f è $\{ xy < 1 \}$ (1p.)

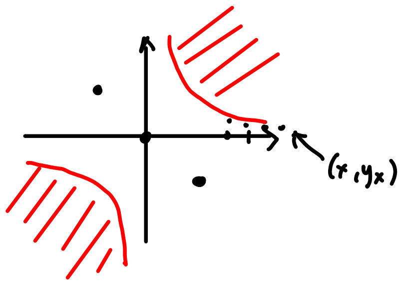
   (b) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (7p.).

   $(x, y) =$ $(0,0)$ punto di ______ $(x, y) =$ $(-1,1)$ punto di MINIMO

   $(x, y) =$ $(1,-1)$ punto di MINIMO $(x, y) =$ ______ punto di ______

   (c) Si dica se $M := \{(x, y) : f(x, y) \leq 0\}$ è limitato (2p.) SI ~~NO~~.

Svolgimento



- Dominio $= 1 - xy > 0 \iff xy < 1$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + \dfrac{2y}{1-xy}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y + x + \dfrac{2x}{1-xy}$

PTI STAZ $\to$ $\begin{cases} x = -\left(1 + \dfrac{2}{1-xy}\right)\dfrac{y}{2} \\ y = -\left(1 + \dfrac{2}{1-xy}\right)\dfrac{x}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x = \left(1 + \dfrac{2}{1-xy}\right)^2 \dfrac{x}{4}$

$x = 0$ oppure $\left(1 + \dfrac{2}{1-xy}\right)^2 = 4$

LA SECONDA EQUIVALE A $\left(1 + \dfrac{2}{1-xy}\right) = \pm 2 \iff \dfrac{2}{1-xy} = \begin{cases} -3 & \leftarrow \text{IMPOSSIBILE PERCHÉ } 1 - xy > 0 \\ 1 & \iff xy = -1 \end{cases}$

TORNO AL SISTEMA E TROVO I DUE CASI

$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\left(1 + \dfrac{2}{1-xy}\right)\dfrac{x}{2} \end{cases}$ $\Updownarrow$ $(x, y) = (0,0)$

$\begin{cases} xy = -1 \\ y = \left(1 + \dfrac{2}{1-xy}\right)\dfrac{x}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} xy = -1 \\ y = -x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = -x \end{cases}$

$(x, y) = \pm(1, -1)$

$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} = 2 + \dfrac{2y^2}{(1-xy)^2}$ $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = 2 + \dfrac{2x^2}{(1-xy)^2}$ $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} = 1 + \dfrac{2(1-xy) - 2yx}{(1-xy)^2} = 1 + \dfrac{2}{(1-xy)^2}$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ det < 0 SELLA

$H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{2}{4} & 1 + \frac{2}{4} \\ 1 + \frac{2}{4} & 2 + \frac{2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ det > 0 $a_{11} > 0$ MINIMO

DATO $x > 0$ si ha $\lim_{y \to \frac{1}{x}^+} f(x, y) = -\infty$ (perché si trova $\ln(0)$). DUNQUE

$\forall x>0\ \exists y_x$ (vicino a $\frac{1}{x}$) con $f(x,y_x)<0$. Dato che x può essere grande e piccolo questi punti sono illimitati

2. Si calcoli la lunghezza della curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\gamma(t) := \left(t\cos(t), t\sin(t), \sqrt{3}t\right)$$

$$\ell(\gamma) = \boxed{4\left(\operatorname{arcsinh}(\pi) + \pi\sqrt{1+\pi^2}\right)}$$

(7p.) *Svolgimento*

$$\gamma'(t) = \left(\cos(t) - t\sin(t),\ \sin(t) + t\cos(t),\ \sqrt{3}\right)$$

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \cos^2(t) - \cancel{2t\cos(t)\sin(t)} + t^2\sin^2(t) + \sin^2(t) + \cancel{2t\cos(t)\sin(t)} + t^2\cos^2(t) + 3 =$$

$$1 + t^2 + 3 = 4 + t^2$$

$$\Rightarrow \ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{4+t^2}\, dt \qquad t = 2s \quad dt = 2\,ds$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sqrt{4+4s^2}\, ds = 8\int_0^{\pi}\sqrt{1+s^2}\, ds = 4\operatorname{arcsinh}(\pi) + 4\pi\sqrt{1+\pi^2}$$

INFATTI $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1+s^2}{\sqrt{1+s^2}}\, ds = \left[\operatorname{asinh}(s)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} s\,\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\, ds =$

$$\operatorname{arcsinh}(\pi) + \left[s\sqrt{1+s^2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sqrt{1+s^2}\, ds = \operatorname{arcsinh}(\pi) + \pi\sqrt{1+\pi^2}$$

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 + x^2y^2 + y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si provi che f è differenziable in $(0,0)$ (6p.) e, se $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, si calcoli (1p.)

$$f'(0,0)(\vec{v}) = \boxed{0}.$$

Svolgimento

Se mi metto con $x=0$ trovo $f(0,y) = \frac{y^2}{y^2} = 1$ e analogamente $f(x,0)=1$

DUNQUE $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. USO LA DEFINIZIONE E MOSTRO CHE

$$(*) := \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{x^2+x^2\cdot y^2+y^2}{x^2+y^2} - 1\right) \to 0$$ IN EFFETTI

$$0 \leq (*) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{(x^2+y^2)+x^2y^2}{(x^2+y^2)} - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4} \to 0$$

DUNQUE f è diff. in $(0,0)$ e $df(0,0)=0$

Ne segue $f'(0,0)(\vec{v}) = df(0,0)\vec{v} = 0$