COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 17 novembre 2017 - PARTE A[1]

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y,z) = (1-x-y+xy)e^{x+y+z}$ si scriva il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato nel punto $(1,1,-2)$ (nelle variabili $(x-1)$, $(y-1)$ e $(z+2)$, senza sviluppare tutte le potenze di questi binomi). Si trovino inoltre $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(1,1,-2)$ e $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(1,1,-2)$ (3p.):

$P_{3,(1,1,-2)}(x,y,z) =$ $(x-1)(y-1) + (x-1)^2(y-1) + (x-1)(y-1)^2 + (x-1)(y-1)(z+2)$

se pongo $x = 1+\alpha$, $y = 1+\beta$, $z = -2+\gamma$ e chiamo $P = (\alpha,\beta,\gamma)$ trovo

$$[1-1-\alpha-1-\beta+(1-\alpha)(1-\beta)]e^{\alpha+\beta+\gamma} = \alpha\beta\, e^{\alpha+\beta+\gamma} = \alpha\beta[1+\alpha+\beta+\gamma+o(\|P\|)] =$$
$$= \alpha\beta + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha\beta\gamma + o(\|P\|^3)$$

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(1,1,-2) = \boxed{2}$ $\qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(1,1,-2) = \boxed{1}$.

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziable tale che $\nabla f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Sia inoltre $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (1+\cos(t), \sin(t), t-\pi)$. Se $\phi(t) = f(\gamma(t))$ si ha:

$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$
$\gamma(\pi) = 0 \qquad \gamma'(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\phi'(\pi) = \nabla f(\gamma(\pi)) \cdot \gamma'(\pi)$
$= \nabla f(0) \cdot \gamma'(\pi) =$ $\phi'(\pi) = \boxed{5}$ (2p.).
$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

3. L'insieme $\{(x,y) : |x| < 1, y \le x^2\}$ è aperto (1p.) SI ~~NO~~.

4. Se una funzione $f$ ha le derivate direzionali $f'(\mathbf{x}_0)(\vec{v})$ in un punto $\mathbf{x}_0$ lungo una qualunque direzione $\vec{v}$ allora $f$ è continua in $\mathbf{x}_0$ SI ~~NO~~ (1p.).

5. Data una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, se $\gamma \in \mathcal{C}^1([a,b])$ allora $\ell(\gamma) < +\infty$ (1p.) ~~SI~~ NO.

6. Si dimostri il seguente teorema (condizione necessaria di minimalità). Se $\Omega$ è un aperto di $\mathbb{R}^N$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$ e se $\mathbf{x}_0$ è un punto di minimo relativo per $f$, allora la matrice hessiana $H_f(\mathbf{x}_0)$ è semidefinita positiva. Si può dare per buono che $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{x}_0$ è stazionario) e, se si vuole, si può supporre $N = 2$ ($f = f(x,y)$) (4p.).

*Svolgimento*

[1] PUNTEGGIO MINIMO Voto A$\geq 4$; Voto A+Voto B$\geq 10$ Tempo: 1/2 ora per la parte A, 1 ora per la parte B

Ingegneria Aerospaziale, Compitino del 17 novembre 2017 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) := 2x^2 + 2y^2 - 3xy - 2\ln(1 + xy)$.

   (a) Il dominio di $f$ è $\boxed{\{\, xy > -1 \,\}}$ (1p.).

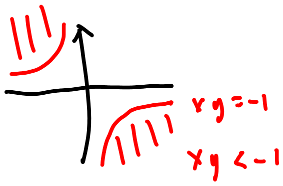
   (b) Si trovino tutti i punti stazionari di $f$ e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (7p.).

   $(x, y) = \boxed{(0,0)}$ punto di ________ $(x, y) = \boxed{(1,1)}$ punto di MINIMO

   $(x, y) = \boxed{(-1,-1)}$ punto di MINIMO $(x, y) = \boxed{\phantom{0}}$ punto di ________

   (c) Si dica se $M := \{(x, y) : f(x, y) \leq 0\}$ è limitato (2p.) $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\text{NO}}$.

*Svolgimento*




• Dominio = $1 + xy > 0 \iff xy > -1$

• $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x - 3y - \dfrac{2y}{1+xy}$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y - 3x - \dfrac{2x}{1+xy}$

PTI STAZ $\to$ $\begin{cases} x = \left(3 + \dfrac{2}{1+xy}\right)\dfrac{y}{4} \\ y = \left(3 + \dfrac{2}{1+xy}\right)\dfrac{x}{4} \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{x}{16}\left(3 + \dfrac{2}{1+xy}\right)^2$

$x = 0$ oppure $1 = \dfrac{1}{4}\left(3 + \dfrac{2}{1+xy}\right)$

LA SECONDA EQUIVALE A $1 = \dfrac{2}{1+xy} \iff 1 + xy = 2 \iff xy = 1$

TORNO AL SISTEMA E TROVO I DUE CASI

$\begin{cases} x = 0 \\ y = \left(3 + \dfrac{2}{1+xy}\right)\dfrac{x}{4} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} xy = 1 \\ y = \left(3 + \dfrac{2}{1+xy}\right)\dfrac{x}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} xy = 1 \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = x \end{cases}$

$\Updownarrow$

$(x,y) = (0,0)$ $\qquad (x,y) = \pm(1,1)$ $\qquad$ (AMMISSIBILI PERCHÉ $xy > -1$)

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 + \dfrac{2y^2}{(1+xy)^2}$ $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 + \dfrac{2x^2}{(1+xy)^2}$ $\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3 - \dfrac{2}{(1+xy)^2}$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ det $< 0 \to$ SELLA

$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 4 + \dfrac{2}{(1+1)^2} & -3 - \dfrac{2}{(1+1)^2} \\ -3 - \dfrac{2}{(1+1)^2} & 4 + \dfrac{2}{(1+1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{9}{2} & \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{7}{2} & \dfrac{9}{2} \end{pmatrix}$ $\qquad$ det $> 0$, $a_{11} > 0$ $\to$ MINIMO

2. Data la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da:

$$\gamma(t) := t\,(\cos(t), \sin(t), 1)$$

e la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y, z) := \sqrt{x^2 + y^2 + 2}$$

si calcoli (7p.):

$$\int_\gamma f(x, y, z)\, d\mathbf{s} = \boxed{4\pi + \frac{8\pi^3}{3}}$$

*Svolgimento*

$$\gamma'(t) = (\cos(t), \sin(t), 3) + t\,(-\sin(t), \cos(t), 0) =: P_1(t) + P_2(t)$$

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \|P_1(t)\|^2 + \underbrace{2\, P_1(t) \cdot P_2(t)}_{=0} + \|P_2(t)\|^2 =$$

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) + 1 + t^2(\sin^2(t) + \cos^2(t)) =$$

$$1 + 3 + t^2 = 4 + t^2$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2 + t^2}$$

$$f(\gamma(t)) = \sqrt{\underbrace{t^2\cos^2(t)}_{x^2} + \underbrace{t^2\sin^2(t)}_{y^2} + 2} = \sqrt{2 + t^2}$$

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} (2 + t^2) =$$

$$\left[2t + \frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = 4\pi + \frac{(2\pi)^3}{3} = 4\pi + \frac{8\pi^3}{3}$$

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^4 + x^2y^2 - y^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si provi che $f$ è differenziabile in $(0,0)$ (6p.) e, se $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, si calcoli (1p.):

$$f'(0,0)(\vec{v}) = \boxed{0}.$$

$f(x,0) = x^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$; $f(0,y) = -y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = -2y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

USIAMO LA DEFINIZIONE. Devo dimostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\|(x-0, y-0)\|} = \Longleftrightarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0. \text{ MA } (*) = \frac{x^4 + x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2) + x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} =$$

$$\underbrace{\frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{1/2}}}_{(1)} + \underbrace{\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}}_{(2)} \Rightarrow \text{ Si ha } |(1)| \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

$$(2) \leq \frac{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

e quindi $(*) \to 0$ dunque $f$ è differenziabile

DUNQUE $f'(0,0)(v_x, v_y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)v_x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)v_y = 0$