COGNOME:												
NOME:												
MATR.:												

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 30 settembre 2017 - PARTE A[1]

1. Si dica, giustificando, se l'insieme $E := \{(x, y) : 4xy \leq 1 + x^2 + y^2\}$ è chiuso. (2p.)

Dato che la funzione $f(x,y) = \dfrac{4xy}{1+x^2+y^2}$ è continua e dato che

$E = \{(x,y) : f(x,y) \leq 1\} \Rightarrow$ E è chiuso

2. Dire se l'insieme $M := \{(x, y) : x^3y \leq 1 + xy^3\}$ è regolare (3p.)

Poniamo $g(x,y) = x^3y - xy^3 - 1$ di modo che $M = \{(x,y) : g(x,y) \leq 0\}$.

Si ha $\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = 3x^2y - y^3$; $\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = x^3 - 3xy^2$. Allora

$\nabla g(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y(3x^2-y^2) = 0 \\ x(3y^2-x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ oppure $\begin{cases} 3x^2 = y^2 \\ 3y^2 = x^2 \end{cases}$.

Ma il sistema $\Rightarrow y^2 = 3x^2 = 9x^2 \Leftrightarrow x = 0$ DUNQUE L'UNICO PTO STAZ. È $(0,0)$

Dato che $g(0,0) = -1 \neq 0$ non ci sono punti stazionari di g con $g = 0$

da cui, per Dini, M è regolare

[1]PUNTEGGIO MINIMO VotoA≥5p. Voto=VotoA+VotoB ($0 \leq$ Voto ≤ 38) - Lode se Voto≥ 33

3. Si mostri che le due superfici

$$S_1 := \{(x,y,z) : z = x^2 - y^2, |x| \le 1, |y| \le 1\} \text{ e } S_2 := \{(x,y,z) : z = x^2 + y^2, |x| \le 1, |y| \le 1\}$$

hanno la stessa area (3p.).

S_1 è grafico di $g_1(x,y) = x^2 - y^2$ su $Q = \{|x| \le 1, |y| \le 1\}$

S_2 è grafico di $g_2(x,y) = x^2 + y^2$ sullo stesso Q. Si ha allora

$$\text{Area}(S_1) = \iint_Q \sqrt{1 + |\nabla g_1(x,y)|^2}\, dx\, dy = \iint_Q \sqrt{1 + |\nabla g_2(x,y)|^2} = \text{Area}(S_2)$$

dato che $\nabla g_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$ $\nabla g_2(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $|\nabla g_1|^2 = 4x^2 + 4y^2 = |\nabla g_2|^2$

4. Si trovi il minimo della funzione $f(x,y) := x + y$ sull'ellisse $E := \{x^2 + 4y^2 \le 5\}$ (3p.)

$E = \{g(x,y) \le 5\}$ con $g(x,y) = x^2 + 4y^2$. Si ha $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix}$ che non si annulla su $\{g = 5\}$. Dato che $\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non ci sono punti stazionari liberi e quindi il pto di minimo è $\{g(x,y) = 5\}$ e verifica

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 5 \end{cases}$$ per un opportuno λ moltiplicatore di Lagrange $\Leftrightarrow$ $$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2\lambda x = 8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda x \quad (\Rightarrow \lambda \neq 0) \\ x = 4y \\ 16y^2 + 4y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ x = 4y \\ y^2 = 1/4 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = \pm\left(2, \tfrac{1}{2}\right).$$ MA $f\left(2, \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} > -\frac{5}{2} = f\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$.

DUNQUE $\boxed{\min_E f = -\frac{5}{2}}$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Se una curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è tale che $\gamma''(t) = \vec{0}\ \forall t \in [0,1]$, allora esistono un punto $P \in \mathbb{R}^3$ e un vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $\gamma(t) = P + t\vec{v}$ per ogni $t \in [0,1]$. ~~VERO~~ FALSO.

(b) Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è di classe $\mathcal{C}^2$, se $x_0 \in \mathbb{R}^3$, $\nabla f(x_0) = \vec{0}$ e se la matrice Hessiana di f in x_0 è simmetrica, allora x_0 è un punto di massimo o minimo relativo per f. VERO ~~FALSO~~.

(c) La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{1+n^4}$ converge uniformemente su $[-1,1]$ ~~VERO~~ FALSO.

(d) Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione continua definita su un insieme aperto e limitato Ω, allora f è integrabile in senso improprio su Ω. VERO ~~FALSO~~.

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) := 2x^3 - 6xy^2 + 5y^3 - 3y$ e l'insieme $M := \{(x, y) : f(x, y) \leq 0\}$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (4p.).

   $(x, y) =$ $(1,1)$ punto di MINIMO $(x, y) =$ $(-1,-1)$ punto di MASSIMO
   $(x, y) =$ $(\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ punto di SELLA $(x, y) =$ $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ punto di SELLA

   (b) Si dica se M è regolare (1p.) ~~SI~~ NO

   (c) Si dica se M è limitato (1p.) SI ~~NO~~.

$$\frac{2}{27} - \frac{6}{27} - \frac{5}{27} + 1 = -\frac{9}{27} + 1 = \frac{2}{3}$$

Svolgimento

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6y^2$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -12xy + 15y^2 - 3$. Dunque (x,y) è stazionario $\iff$

$$\begin{cases} x^2 = y^2 \\ 5y^2 - 4xy = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm y \\ 5x^2 \mp 4x^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x^2 = 1 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x = -y \\ 9x^2 = 1 \end{cases} \to \begin{matrix} \pm(1,1) \\ \pm\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) \end{matrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12x + 30y \Rightarrow Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -12y \\ -12y & -12x+30y \end{pmatrix}$$

$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 18 \end{pmatrix}$ det>0, $a_{11}>0$ $(1,1)$ pto di minimo

$Hf(-1,-1) = -Hf(1,1) \Rightarrow (-1,-1)$ pto di max

$Hf\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -14 \end{pmatrix}$ det <0 $\Rightarrow \left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ sella

$Hf\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}$ det <0 $\Rightarrow \left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ sella

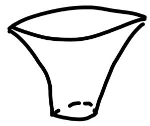
NOTA $f(1,1) = -2$ $f(-1,-1) = 2$ $f\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ $f\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$

- Dato che $\partial M = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$ non contiene pti critici $\Rightarrow M$ è regolare
- Dato che $f(x,0) = x^3 \leq 0$ per tutte le $x \leq 0$ $\Rightarrow$

$(x,0) \in M$ $\forall x \leq 0$. MA i punti $(x,0)$ al variare di $x \leq 0$ sono illimitati $\Rightarrow$ M non è limitato

$$3x^2y^2z + 3x^2y^2z - 2x^2y^2z$$

2. Si considerino l'aperto Ω e il campo vettoriale $\vec{f}$ definiti da:



$$\Omega := \left\{(x,y,x) \,:\, x^2+y^2-z^2<1, 0<z<1\right\},$$
$$\vec{f}(x,y,z) := z(x^3y^2+e^{yz})\vec{\mathbf{i}} + z(x^2y^3-e^{xz})\vec{\mathbf{j}} - z^2x^2y^2\vec{\mathbf{k}}.$$

(a) Si descriva la frontiera (topologica) $\partial\Omega$ di Ω. (1p.)

$\partial\Omega = B_0 \cup B_1 \cup S$ dove

$B_0 = \{(x,y,0) : x^2+y^2 \leq 1\}$

$B_1 = \{(x,y,1) : x^2+y^2 \leq 2\}$

$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 1+z^2, \ 0 \leq z \leq 1\}$

(b) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso $\partial\Omega$ (3p.)

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \boxed{\frac{5}{16}\pi}$$

(c) Posto $S := \{x^2+y^2-z^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$, si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso S (con normale che punta in verso opposto all'origine) (2p.)

$$\iint_{S} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \boxed{\frac{31}{48}\pi}$$

Svolgimento

(a) è chiaro. (b) Usiamo il teor. della divergenza:

$\operatorname{div}\vec{f} = 4x^2y^2z$ (facili calcoli). Allora

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iiint_{\Omega} 4x^2y^2z\,dx\,dy\,dz = 4\int_0^1 z\left(\iint_{\{x^2+y^2\leq 1+z^2\}} x^2y^2\,dx\,dy\right)dz =$$

$$4\int_0^1 z\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{1+z^2}} (\rho\cos(\theta))^2(\rho\sin(\theta))^2\rho\,d\rho\right)d\theta = 4\int_0^1 z\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta\int_0^{\sqrt{1+z^2}}\rho^5\,d\rho\right)dz =$$

$$4\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta\int_0^1\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^{\sqrt{1+z^2}} z\,dz = \int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4\theta)}{2}\,d\theta\int_0^1\frac{(1+z^2)^3 z}{6}\,dz =$$

$$\frac{1}{12}\cdot 2\pi \int_0^1 (1+s)^3 \frac{ds}{2} = \frac{\pi}{12}\left[\frac{(1+s)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{48}\left(2^4-1\right) = \frac{15\pi}{48} = \frac{5}{16}\pi$$

(c) $$\iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \iint_S \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma - \iint_{B_0} \vec{f}\cdot\vec{k}\, d\sigma + \iint_{B_1} \vec{f}\cdot\vec{k}\, d\sigma .$$ Ma

$$\iint_{B_0} \vec{f}\cdot\vec{k}\, d\sigma = \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} f_3(x,y,0)\, dx\, dy = \iint_{\{x^2+y^2\le 1} 0 \, dx\, dy = 0$$, mentre

$$\iint_{B_1} \vec{f}\cdot\vec{k}\, d\sigma = \iint_{\{x^2+y^2\le 2\}} f_3(x,y,1)\, dx\, dy = -\iint_{\{x^2+y^2\le 2\}} x^2y^2\, dx\, dy = -\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta)\cos^2(\theta) \int_0^{\sqrt{2}} \rho^5\, d\rho =$$

$$-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(4\theta)}{2}\, d\theta \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{2}\cdot\frac{2^3}{6} = -\frac{\pi}{3}$$

DUNQUE $$\frac{5}{16}\pi = \iint_S \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma - \frac{\pi}{3} \iff \iint_S \vec{f}\,\vec{\nu}\, d\sigma = \pi\left(\frac{15+16}{48}\right) = \frac{31}{48}\pi$$

3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo π e definita su $[0, \pi[$ da

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{3\pi}{4}, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Si trovi lo sviluppo in serie di Fourier (3p.) di f indicando:

$\omega = \boxed{2}$, (freq. ang.) $\qquad a_0 = \boxed{1/2}$,

$a_n = \boxed{\begin{matrix} 0 & \text{se } n = 2k \\ \dfrac{-2(-1)^k}{\pi(2k+1)} & \text{se } n = 2k+1 \end{matrix}}$, $\qquad b_n = \boxed{0}$ $\qquad (n \ge 1)$.

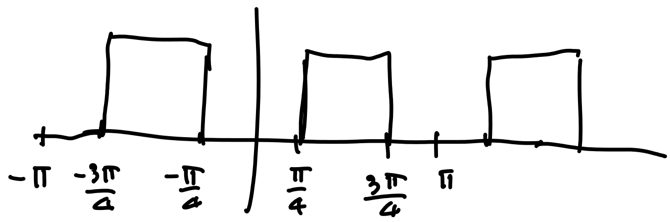
(b) Usando l'eguaglianza di Parceval si trovi la somma della seguente serie (2p.):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}$$

Svolgimento

$T = \text{periodo} = \pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2.$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 1\,dt = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$



La funzione è pari $\Rightarrow b_n = 0 \ \forall n$

Se $n \geq 1$ $\quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(2nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos(2nt)\,dt =$

$\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{1}{n\pi}\left(\sin\left(n\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) =$

$\frac{1}{n\pi}\begin{cases} \sin(3k\pi) - \sin(k\pi) = 0 & \text{se } n = 2k \ (n \text{ PARI}) \\ \sin\left(3k\pi + \frac{3}{2}\pi\right) - \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) & \text{se } n = 2k+1 \ (n \text{ DISPARI}) \end{cases} = (\text{guardo solo } n = 2k+1)$

$\frac{1}{(2k+1)\pi}\left(\sin\left(k\pi + \frac{3}{2}\pi\right) - \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\cos(k\pi)}{(2k+1)\pi}\left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{-2(-1)^k}{(2k+1)\pi}$

Applicando Parceval $\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(t)\,dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_n a_n^2 \Rightarrow$

$\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 1^2\,dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_k \frac{4}{(2k+1)^2}\frac{1}{\pi^2} \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \Leftrightarrow$

$$\sum_k \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{8}$$

4. ($\square$ scelgo di fare l'esercizio alternativo essendo iscritto prima dell'a.a. 2015-16)

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = -x - y + z \\ y' = 2x - 8y + 10z \\ z' = x - 5y + 7z \end{cases}$$

(a) Chiamiamo A la matrice associata al sistema e J la forma di Jordan di A. Si dia per buono che il polinomio caratteristico di A è $P(\lambda) = (2+\lambda)^2(2-\lambda)$. Si scrivano le seguenti matrici (4p.):

$$(A+2I) = \boxed{\begin{pmatrix} 1, & -1 & 1 \\ 2, & -6, & 10 \\ 1, & -5, & 9 \end{pmatrix}}, \qquad (A+2I)^2 = \boxed{\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & -16, & 32 \\ 0, & -16, & 32 \end{pmatrix}},$$

$$(A-2I) = \boxed{\begin{pmatrix} -3, & -1, & 1 \\ 2, & -10, & 10 \\ 1 & -5, & 5 \end{pmatrix}}, \qquad e^{tJ} = \boxed{\begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}},$$

(b) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$ (4p.)

$$x(t) = \boxed{(t+1)\, e^{-2t}}$$

$$y(t) = \boxed{2t\, e^{-2t}}$$

$$z(t) = \boxed{t\, e^{-2t}}$$

Svolgimento

$$A = \begin{pmatrix} -1, & -1, & 1 \\ 2, & -8, & 10 \\ 1, & -5, & 7 \end{pmatrix}$$

Se $P(\lambda) = (\lambda+2)^2(2-\lambda)$ ho due autov. $\lambda_1 = -2$ (molt. alg. 2) e $\lambda_2 = 1$. Si ho

$$(A-\lambda_1 I) = \begin{pmatrix} 1, & -1, & 1 \\ 2, & -6, & 10 \\ 1, & -5, & 9 \end{pmatrix}$$ che ha rango 2 (il minore in rosso ha det $\neq 0$) (det complessivo $= 0$ perché λ_1 è autovalore)

$$(A-\lambda_1 I)^2 = \begin{pmatrix} 1, & -1, & 1 \\ 2, & -6, & 10 \\ 1, & -5, & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & -1, & 1 \\ 2, & -6, & 10 \\ 1, & -5, & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 32 \\ 0 & -16 & 32 \end{pmatrix}$$ che ha rango 1. ★

$$(A-\lambda_2 I) = \begin{pmatrix} -3, & -1, & 1 \\ 2 & -10 & 10 \\ 1, & -5, & 5 \end{pmatrix}$$ che ha rango 2. Dato che $(A-\lambda_1 I)$ NON HA rango 1, c'è un solo autovettore e $J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Per trovare una base di autov. gen. devo trovare $e_2 \in Ker(A+2I)^2$ con $e_2 \notin Ker(A+2I)$.

Si vede che la condizione $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A+2I)^2 \iff y = 2z$ (vedi ★) dunque $v = \begin{pmatrix} x \\ 2z \\ z \end{pmatrix}$. Se prendo $x=1$ $z=0$ trovo $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se calcolo $e_1 = (A+2I)e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vedo che $e_1 \neq 0$ (dunque $e_2 \notin Ker(A+2I)$) e per la teoria e_1 è un autovett. di autov. $\lambda_1 = -2$. Infine cerco $e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A-2I)$

$$\iff \begin{cases} -3x - y + z = 0 \\ 2x - 10y + 10z = 0 \\ x - 5y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5(y-z) \\ -15y + 15z - y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \Rightarrow \text{prendo} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

stesse cond.

Dunque se $M = (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si ha $A = MJM^{-1}$ ed $e^{tA} = Me^{tJ}M^{-1}$

La soluzione del sistema si trova, ponendo $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dalla formula

$$Y(t) = e^{tA}Y_0 = Me^{tJ}M^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Me^{tJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

N.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2$!! e $M\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2$

$$M\begin{pmatrix} e^{-2t}, & te^{-2t}, & 0 \\ 0, & e^{-2t}, & 0 \\ 0, & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-2t}M\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-2t}M\left(t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) =$$

$$e^{-2t}\left(tM\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = e^{-2t}\left(t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = e^{-2t}\begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$$

VERIFICA (NON RICHIESTA)

$x(t) = e^{-2t}(t+1) \Rightarrow x'(t) = e^{-2t}(-2t-2+1) = e^{-2t}(-2t-1)$

$y(t) = 2e^{-2t}t \Rightarrow y'(t) = e^{-2t}(-4t+2)$

$z(t) = e^{-2t}t \Rightarrow z'(t) = e^{-2t}(-2t+1)$

$-x(t) - y(t) + z(t) = e^{-2t}(-t-1-2t+t) = e^{-2t}(-2t-1) = x'(t)$ TORNA

$2x(t) - 8y(t) + 10z(t) = e^{-2t}(2t+2-16t+10t) = e^{-2t}(-4t+2) = y'(t)$ TORNA

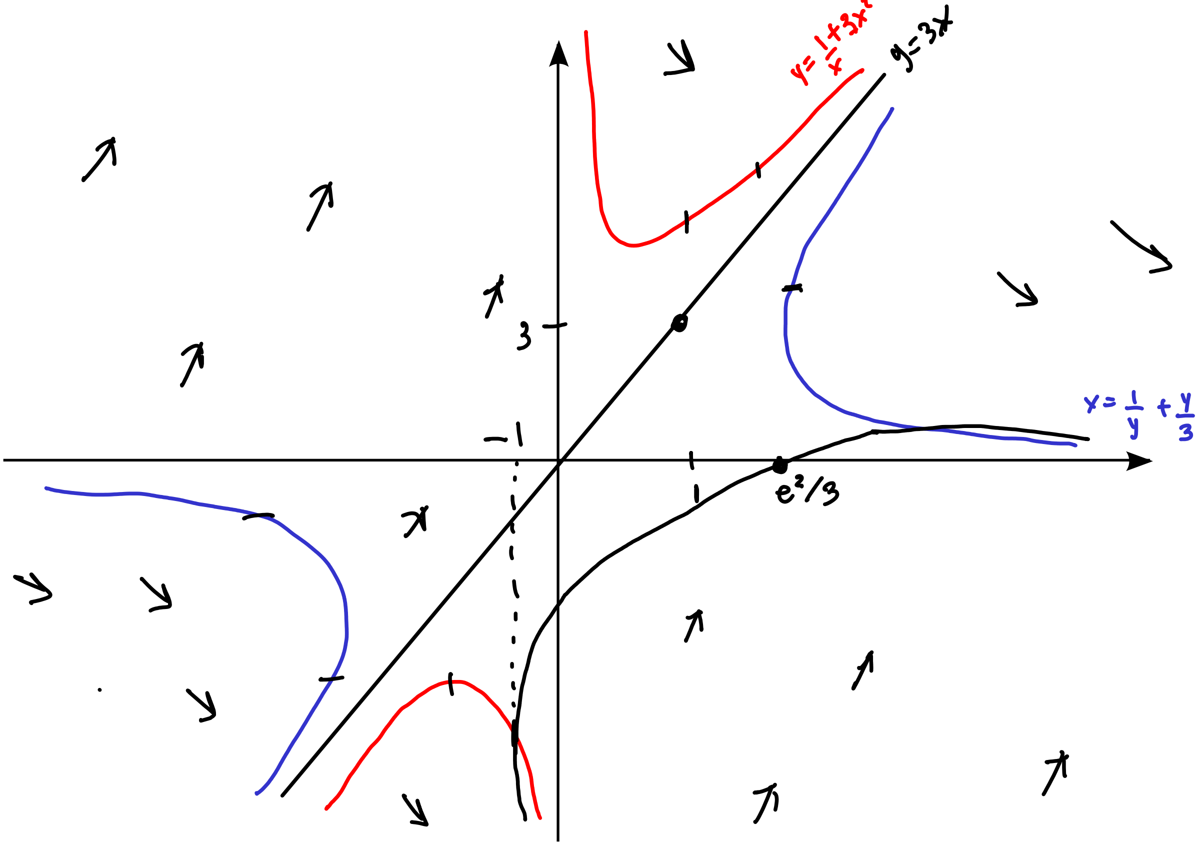
$x(t) - 5y(t) + 7z(t) = e^{-2t}(t+1-10t+7t) = e^{-2t}(-2t+1) = z'(t)$ TORNA

5. Variante esercizio 4 SOLO per gli iscritti prima del 2015-16 (che possono anche scegliere di fare l'altro)

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y^2 - 3xy + 3}{3x^2 - xy + 1}$$

(a) Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).



(b) Si trovi un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x, y) = \lambda(xy)$. Si trovi poi un integrale primo $\Phi(x, y)$ (4p.).

$\lambda(x, y) =$ $\boxed{e^{-xy}}$, $\Phi(x, y) =$ $\boxed{e^{-xy}(y - 3x)}$.

(c) Si trovi la soluzione $y(x)$ relativa al dato iniziale $(1, 3)$, e se ne riporti il grafico nel diagramma della pagina precedente (1p.)

$y(x) =$ $\boxed{3x}$.

(d) Si tracci il grafico qualitativo della soluzione con dato iniziale $\left(e^2/3, 0\right)$ e si trovi in particolare l'intervallo massimale di esistenza $]\underline{x}, \overline{x}[$ (2p.)

$\underline{x} =$ $\boxed{-1}$, $\overline{x} =$ $\boxed{+\infty}$

Svolgimento

(b) $\frac{\partial}{\partial y}\lambda(xy)\left(y^2-3xy+3\right)+\frac{\partial}{\partial x}\lambda(xy)\left(3x^2-xy+1\right)=0 \iff$

$x\lambda'(xy)\left(y^2-3xy+3\right)+\lambda(xy)(2y-3x)+y\lambda'(xy)\left(3x^2-xy+1\right)+$