COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 22 luglio 2017 - PARTE A[1]

1. Dire se la funzione $f(x,y) := \dfrac{xy}{x^2+4y^4}$, posta 0 in $(0,0)$, è continua nell'origine. (2p.)

· Se calcolo f sulla retta $y = mx$ trovo $f(x,mx) = \dfrac{mx^2}{x^2+4m^4x^4} = \dfrac{m}{1+4m^4x^2}$

Dunque $\lim_{x \to 0} f(x,mx) = m^2$ che dipende da m e comunque non è zero (lo è solo se $m=0$ o $m=\infty$). Ne segue che f NON È CONTINUA

2. Dire se l'insieme $M := \{(x,y,z) : x^3y + xy^3 \le 1\}$ è un insieme regolare (3p.)

Posto $g(x,y) = x^3y + xy^3 - 1$ si ha $M = \{g(x,y) \le 0\}$. Il Dini garantisce che M è regolare se $\nabla g(x,y) \ne \binom{0}{0}$ per tutte le (x,y) con $g(x,y)=0$.

Gli eventuali punti (x,y) per cui questo non è vero devono verificare

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = 3x^2y + y^3 = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = x^3 + 3xy^2 = 0 \\ g = x^3y + xy^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

La prima riga equivale a $y=0$ oppure $3x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$
La seconda riga equivale a $x=0$ oppure $x^2+3y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$
DUNQUE $\nabla g(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

Ma $g(0,0) = -1$ per cui la terza riga non

DUNQUE M è regolare

[1] PUNTEGGIO MINIMO VotoA$\ge$5p. Voto=VotoA+VotoB ($0 \le$ Voto ≤ 38) - Lode se Voto≥ 33

3. Si calcoli l'area della superficie definita da $S := \{(x,y,z) : 2z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ (3p.)

S è grafico di $z = f(x,y) := \frac{x^2-y^2}{2}$. Allora $\frac{\partial f}{\partial x} = x$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -y$

e $\text{Area}(S) = \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \sqrt{1+|\nabla f|^2}\, dx\, dy = \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \sqrt{1+x^2+y^2}\, dx\, dy \underset{\text{(coord. polari)}}{=}$

$2\pi \int_0^1 \sqrt{1+\rho^2}\, \rho\, d\rho \underset{(y=\rho^2,\ 2\rho d\rho = dy)}{=} \pi \int_0^1 \sqrt{1+y}\, dy = \pi\left[\frac{2}{3}(1+y)^{3/2}\right]_0^1 =$

$$\boxed{\frac{2}{3}\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)}$$

4. Si trovi il minimo della funzione $f(x,y) := x + y$ sul disco unitario $B := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ (3p.)

Uso i moltiplicatori ($B = \{g(x,y) \leq 0\}$ con $g(x,y) = x^2+y^2-1$)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 1 = \lambda\, 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 = \lambda\, 2y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \iff \lambda \neq 0$$

e facendo la differenza tra le prime 2 righe $\Rightarrow x = y$

Mettendo $x = y$ nella terza riga trovo $x^2 = y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Dato che $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$, $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\min_B f = -\sqrt{2}}$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Se un campo $\vec{f}$ (regolare quanto serve), è definito su $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < 1\}$ ed è irrotazionale, allora $\vec{f}$ è conservativo $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(L'INSIEME È CONVESSO $\Rightarrow$ sempl. connesso)

(b) Ogni campo solenoidale è conservativo $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

Non c'è relazione tra $\operatorname{div} f = 0$ e $\operatorname{rot} f = 0$

(c) Se f è periodica e ha come coefficienti di Fourier $a_n = 0$, $b_n = \frac{n}{1+n^4}$, allora f è derivabile $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

perché $\sum n|b_n|$ è convergente

(d) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora f è integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}^2$. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

per esempio $f(x,y) = x$

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 22 luglio 2017 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x,y) := 2x^3 + 6xy^2 - 3y^3 - 150x$ e l'insieme $M := \{(x,y) : f(x,y) \leq 0\}$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (4p.).

   $(x,y) =$ (5, 0) punto di minimo $(x,y) =$ (−5, 0) punto di massimo
   $(x,y) =$ (3, 4) punto di sella $(x,y) =$ (−3, −4) punto di sella

   (b) Si dica se M è regolare (1p.) ~~SI~~ NO

   (c) Si dica se M è limitato (1p.) SI ~~NO~~.

Svolgimento

(a) $f(x,y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3y^3 - 150x$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 6y^2 - 150$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 12xy - 9y^2$ IMPONGO $\nabla f = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow (4x - 3y)y = 0 \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases}$. Se $y = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5$

Se $y = \frac{4}{3}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 3$

DUNQUE $\pm(5,0)$
DUNQUE $\pm(3,4)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12y$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12x - 18y$. DUNQUE

$H_f(5,0) = \begin{pmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 60 \end{pmatrix} \Rightarrow (5,0)$ pto di minimo ; $H_f(-5,0) = \begin{pmatrix} -60 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow (-5,0)$ pto di massimo

$H_f(3,4) = \begin{pmatrix} 36 & 48 \\ 48 & -36 \end{pmatrix}$ $\det(H_f) = -36^2 - 48^2 < 0$ $\Rightarrow (3,4)$ pto di sella

$H_f(-3,-4) = \begin{pmatrix} -36 & -48 \\ -48 & 36 \end{pmatrix}$ $\det(H_f) - 36^2 - 48^2 < 0$ $\Rightarrow (-3,-4)$ pto di sella

(b) Dato che $f(\pm 5, 0) = \mp 500 \neq 0$, $f(\pm(3,4)) = \mp 6 \cdot 66 \neq 0$ si ha che nessun punto critico si trova su $\{f(x,y) = 0\} \Rightarrow M$ è regolare

(c) I punti $(0,y)$ con $y \geq 0$ si trovano in M perchè $f(0,y) = -3y^3 \leq 0$.
Dato che tali punti sono illimitati $\Rightarrow M$ è ILLIMITATO

2. Si considerino l'aperto Ω e il campo vettoriale $\vec{f}$ definiti da:

$$\Omega := \left\{(x, y, x)\ : x^2 + y^2 + z^2 < 1, y > x\right\}, \qquad \vec{f}(x, y, z) := xy(\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}}) - xz\vec{\mathbf{k}}.$$

(a) Si descriva la frontiera (topologica) $\partial\Omega$ di Ω. (1p.)

$\partial\Omega = S \cup B$ dove

$S = \{ x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq x \}$

$B = \{ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y = x \}$

(b) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso $\partial\Omega$ (3p.)

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \boxed{\frac{\sqrt{2}\pi}{8}}$$

(c) Posto $S := \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, y > x\}$, si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso S (con normale che punta in verso opposto all'origine) (2p.)

$$\iint_{S} \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{8}\pi}$$

Svolgimento

(a) è chiaro

(b) Uso il teorema della divergenza: $\operatorname{div}(\vec{f}) = y + x - x = y$

$\Rightarrow \iint_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \iiint_{\Omega} y\, dx\, dy\, dz = (*)$. Passo in coordinate sferiche

$x = \rho \cos\theta \sin\psi \quad y = \rho \sin\theta \sin\psi \quad z = \rho\cos\theta \Rightarrow dx\,dy\,dz = \rho^2 \sin\psi\, d\theta\, d\psi\, d\rho$

La condizione $x < y$ diventa $\cos\theta < \sin\theta$ cioè $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$. Dunque

$$(*) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^{\pi} \int_0^1 \rho^3 \sin\theta \sin^2\psi\, d\theta\, d\psi\, d\rho = \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin\theta\, d\theta}_{1} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^2\psi\, d\psi}_{2} \underbrace{\int_0^1 \rho^3\, d\rho}_{3}$$

$$① = \Big[-\cos(\theta)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$② = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(2\psi)}{2}\, d\psi = \frac{\pi}{2} - \underbrace{\int_0^{\pi} \cos(2\psi)\, d\psi}_{=0} = \frac{\pi}{2}$$

$$③ = \int_0^1 \rho^3\, d\rho = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

(c) Calcoliamo $\iint_B \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma$. Notiamo che la normale $\vec{\nu}$ su B è il vettore (fisso) $\vec{j}-\vec{i}$ (perché in B c'è la condizione di vincolo $y=x$)

Allora, su B, $\vec{f}\cdot\vec{\nu} = \left(xy(\vec{i}+\vec{j}) - xz\vec{k}\right)(\vec{j}-\vec{i}) = 0$!!

Dunque $$\iint_S \vec{f}\cdot\vec{\nu} = \iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\vec{\nu} - \iint_B \vec{f}\cdot\vec{\nu} = \iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\vec{\nu}$$

3. Si consideri la serie di potenze $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ e poniamo $g(x) := xf(x)$.

(a) Si trovi il raggio di convergenza R della serie(0.5p.): $R = \boxed{1}$

e si dica per quali x la serie converge (.5p) $\boxed{-1 \leq x < 1}$.

(b) Si trovi un'espressione per serie della derivata di g (1p.) $g'(x) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}$.

(c) Si usino (a) e (b) per trovare un'espressione analitica di f (3p.) $f(x) = \boxed{\frac{-\ln(1-x)}{x}}$.

Svolgimento

(a) Facendo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = 1$ TROVO $R=1$

Per la teoria la serie converge in $]-1,1[$ e non converge fuori $[-1,1]$

Se $x=1$ Trovo $\sum_0^\infty \frac{1}{n+1}$ che diverge, dunque in $x=1$ non c'è convergenza

Se $x=-1$ Trovo $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n+1}$ che converge per Leibniz.

IN DEFINITIVA la serie conv per $-1 \leq x < 1$

(b) Si ha $g(x) = xf(x) = \sum_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Derivando per serie

$$g'(x) = \sum_0^\infty \frac{(n+1)x^n}{n+1} = \sum_0^\infty x^n$$

(c) Per (b) $g'(x)$ è la serie geometrica $\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1-x}$

Dato che $g(0)=0$ si ha $g(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$

Se ne ricavo $f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$

NOTIAMO CHE LA FORMULA NON HA SENSO PER $x=0$, però.

$\lim_{x\to 0} \frac{-\ln(1-x)}{x} = 1$ che torna con l'espressione iniziale di f come serie di potenze.

4. $\left(\square\right.$ scelgo di fare l'esercizio alternativo essendo iscritto prima dell'a.a. 2015-16$\left.\right)$

Si consideri il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} 2x' = 2x - y + z \\ 2y' = y + z \\ 2z' = -y + 3z \end{cases}$$

(a) Detta A la matrice associata al sistema si scrivano la forma canonica di Jordan per A, detta J e la matrice esponenziale e^{tJ} (4p.)

$$J = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad e^{tA} = \boxed{\frac{e^t}{2}\begin{pmatrix} 4 & 1-t & -1+t \\ -2 & 1-t & 1+t \\ 2 & 1-t & 1+t \end{pmatrix}}$$

(b) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 1$, $y(0) = -1$, $z = 1$ (2p.)

$$x(t) = \boxed{e^t(1+t)}$$

$$y(t) = \boxed{e^t(-1+t)}$$

$$z(t) = \boxed{e^t(1+t)}$$

Svolgimento

Calcoliamo il polinomio caratteristico di $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1/2 & 1/2 \\ 0 & \frac{1-2\lambda}{2} & 1/2 \\ 0 & -1/2 & \frac{3-2\lambda}{2} \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left\{\frac{(1-2\lambda)}{2}\left(\frac{3-2\lambda}{2}\right) + \frac{1}{4}\right\} = \frac{(1-\lambda)}{4}\{4\lambda^2 - 8\lambda + 4)$$

$$= (1-\lambda)^3$$

DUNQUE C'È SOLO L'AUTOVALORE $\lambda = 1$

Pongo $B := A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

si vede che B ha rango 1 $\Rightarrow$ $\dim(\mathrm{Ker}\, B) = 2$

Possiamo prendere un vettore e_3 che non sia in $Ker(B)$, per esempio

$e_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Se pongo $e_2 = Be_3$ trovo $e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (che è in $Ker(B)$)

Dato che $Ker(B)$ ha dimensione 2 devo trovare un altro elemento $e_1 = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ in $Ker(B)$, cioè con $y = z$, che sia indipendente da e_2.

$$\Rightarrow \text{posso prendere } e_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Da tutto questo vedo che $J = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ e $A = MJM^{-1}$ con

$M = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Facendo i calcoli ho $M^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1/2 & -1/2\\0 & -1/2 & 1/2\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t & te^t & 0\\0 & e^t & 0\\0 & 0 & e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1/2 & -1/2\\0 & -1/2 & 1/2\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$$\frac{e^t}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & t & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\0 & -1 & 1\\-2 & 0 & 2\end{pmatrix} = \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1-t & -1+t\\2 & 0 & 0\\-2 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix}4 & 1-t & -1+t\\-2 & 1-t & 1+t\\2 & 1-t & 1+t\end{pmatrix} =$$

Se $Y(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$ abbiamo $Y(t) = e^{tJ}Y_0$. Se $Y_0 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$Y(t) = \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix}4 & 1-t & -1+t\\-2 & 1-t & 1+t\\2 & 1-t & 1+t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix}2+2t\\-2+2t\\2+2t\end{pmatrix} = e^t\begin{pmatrix}1+t\\-1+t\\1+t\end{pmatrix}$$

$$= e^t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + te^t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}x &= e^t(1+t)\\y &= e^t(-1+t)\\z &= e^t(1+t)\end{aligned}$$

VERIFICA

$x' = e^t(1+t) + e^t = e^t(2+t)$

$y' = e^t(-1+t) + e^t = te^t$

$z' = e^t(2+t)$

$x - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = e^t\left(1+t + \frac{1}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right) = e^t(2+t) = x'$

$\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = e^t\left(-\frac{1}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right) = te^t = y'$

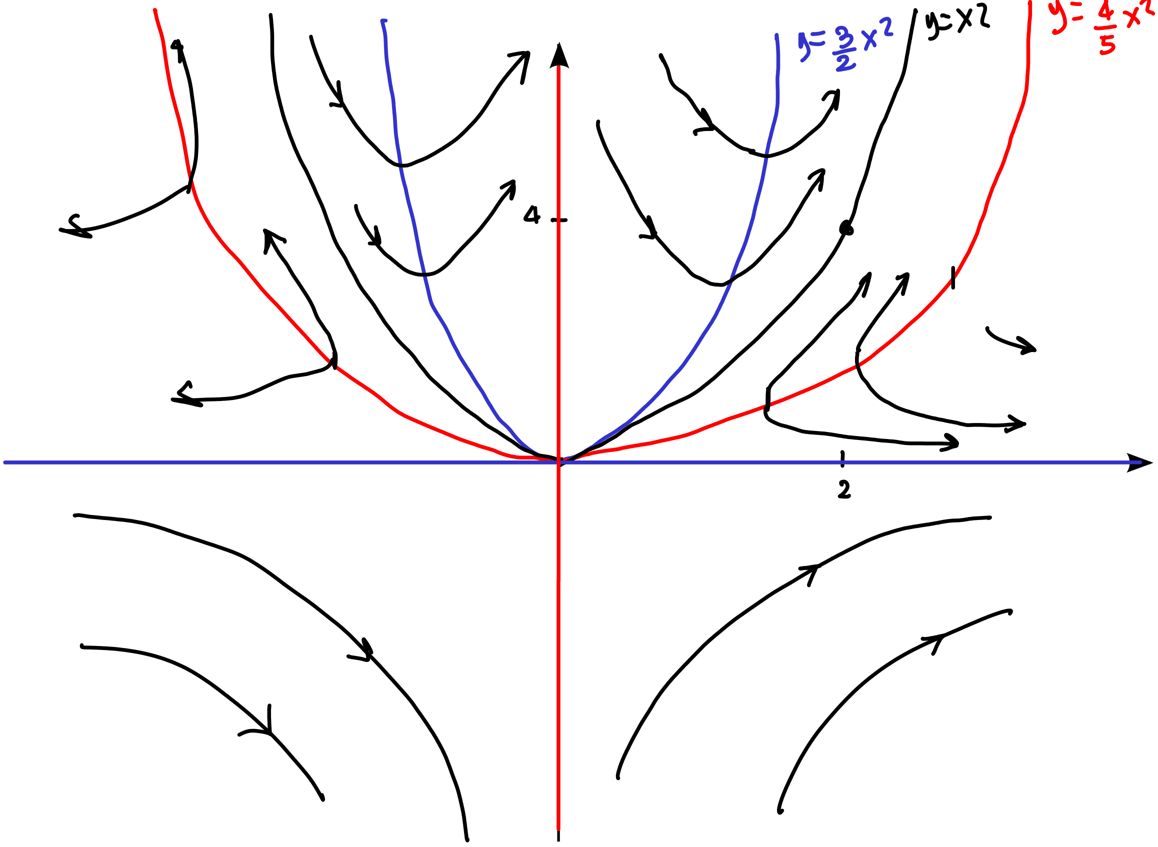
$-\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z = e^t\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3t}{2}\right) = e^t(2+t) = z'$

5. Variante esercizio 4 SOLO per gli iscritti precedentemente al 2015-16

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{y(4y-6x^2)}{x(5y-4x^2)}$$

(a) Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).



(b) Si trovi un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x, y) = \lambda(xy)$. Si trovi poi un integrale primo 4p.).

$$\frac{\partial}{\partial y}\lambda(xy)\left(4y^2-6x^2y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\lambda(xy)\left(5xy-4x^3\right) \iff$$

$$x\lambda'(xy)\left(4y^2-6x^2y\right)+\lambda(xy)\left(8y-6x^2\right) = y\lambda'(xy)\left(5xy-4x^3\right)+\lambda(xy)\left(5y-12x^2\right) \iff$$

$$\lambda'(xy)\left(4xy^2-6x^3y-5xy^2+4x^3y\right) = \lambda(xy)\left(-8y+6x^2+5y-12x^2\right) \iff$$

$$\lambda'(xy)\left(-xy^2-2x^3y\right) = \lambda(xy)\left(-6x^2-3y^2\right) \iff \lambda'(xy)\,xy\,\cancel{\left(-y-2x^2\right)} = \lambda'(xy)\,3\cancel{\left(-y-2x^2\right)}$$

Dunque $\lambda'(t) = \frac{3}{t}\lambda(t) \iff \lambda(t) = c\,t^3$. Prendo $c=1 \Rightarrow \boxed{\lambda(x,y) = x^3y^3}$

Cerco un int. primo $\phi(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi = x^3y^3\, y(4y-6x^2) = 4x^3y^5 - 6x^5y^4 \Rightarrow \phi(x,y) = x^4y^5 - x^6y^4 + c(y)$$

Allora $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 5x^4y^4 - 4x^6y^3 + c'(y)$ che deve fare $x^3y^3\, x(5y-4x^2) = 5x^4y^4 - 4x^6y^3$

DUNQUE $c' = 0$ e $\phi(x,y) = x^4y^5 - x^6y^4 + \text{cost.} = \boxed{x^4y^4(y-x^2)+c}$

(c) Si trovi la soluzione $y(x)$ relativa al dato iniziale $(2,4)$, e se ne riporti il grafico nel diagramma della pagina precedente (1p.)

Parto da $x_0 = 2, y_0 = 4$. Deve essere $\phi(x, y(x)) = \phi(x_0, y_0) = 0$ (!!!)

$$\Rightarrow \quad x^4y^4(y-x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = x^2}$$