COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 1 luglio 2017 - PARTE A[1]

1. Se $f(x, y)$ è una funzione differenziabile avente $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 3$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$, si può calcolare la derivata direzionale $f'(0,0)(2\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}})$? Se la risposta è sì, quanto fa tale derivata? (2p.)

Se f è diff $\Rightarrow$ $f'(P)\vec{v} = \nabla f \cdot \vec{v}$. Dunque in questo caso

$$f'(0,0)\cdot(2\vec{i}+\vec{j}) = \nabla f(0,0)\cdot(2\vec{i}+\vec{j}) = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = 6-1 = 5$$

2. Dato l'insieme $M := \{(x, y, z) : xy + z = 3, yz + x = 3\}$ in $\mathbb{R}^3$ e il punto $P_0) := (1, 1, 2)$ si mostri che $P_0 \in M$ e (usando il teorema delle funzioni implicite) che vicino al punto P_0 è possibile descrivere M mediante due funzioni $y(x)$ e $z(x)$ (si possono esplicitare y e z in termini di x) (3p.)

Poniamo $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy+z-3 \\ yz+x-3 \end{pmatrix}$ di modo che $M = \{g(x,y,z) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}$.

$P_0 \in M$ perché $g(P_0) = g(1,1,2) = \begin{pmatrix}1+2-3\\2+1-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ Inoltre la Jacobiana

$J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} y & x & 1 \\ 1 & z & y \end{pmatrix}$ da cui $J_g(P_0) = J_g(1,1,2) = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \qquad (y,z)\end{array}$

In questa matrice il <u>minore (y,z) è $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$</u> che ha <u>determinante $\neq 0$.</u> Usando le funzion implicit si ricava la tesi

[1]PUNTEGGIO MINIMO VotoA$\geq$5p. Voto=VotoA+VotoB ($0 \leq$ Voto ≤ 38) - Lode se Voto≥ 33

3. Data la curva $\gamma(t) := t\cos(t)\vec{\mathbf{i}} + t\sin(t)\vec{\mathbf{j}}$, per $0 \le t \le 2\pi$, si calcoli la lunghezza di γ (3p.)

$$\gamma'(t) = \left(\cos(t) - t\sin(t)\right)\vec{i} + \left(\sin(t) + t\cos(t)\right)\vec{j} \Rightarrow$$

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \left(\cos(t) - t\sin(t)\right)^2 + \left(\sin(t) + t\cos t\right)^2 =$$

$$\underbrace{\cos^2 t + \sin^2(t)}_{=1} - 2t\,\cancel{\cos(t)\sin(t)} + \underbrace{t^2\sin^2(t) + t^2\cos^2 t}_{=t^2} + 2t\,\cancel{\sin t\cos t} = 1 + t^2$$

Dunque $\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi}\sqrt{1+t^2}\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \left[\operatorname{arcsinh}(t)\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} t\,\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt =$

$\operatorname{arcsinh}(2\pi)$ + (per parti) $\left[t\sqrt{1+t^2}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sqrt{1+t^2}\,dt \Rightarrow$

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi}\sqrt{1+t^2}\,dt = \boxed{\frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(2\pi) + \pi\sqrt{1+4\pi^2}}$$

4. Posto $f_n(x) := e^{-nx}$ per $x \in \mathbb{R}$ si dica se la successione di funzioni (f_n) ammette un limite puntuale f e in caso affermativo se le f_n convergono uniformemente a f (3p.)

Si vede facilmente che $\lim_{n\to\infty} e^{-nx} = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x>0 \end{cases}$

Allora f_n converge puntualmente a $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x>0 \end{cases}$. Però NON CONVERGE UNIF. perchè f è discontinua, mentre le f_n sono continue.

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Se un campo $\vec{f}$ (regolare quanto serve), è definito su $\Omega := \{(x,y,z) : z < 0\}$ ed è irrotazionale, allora $\vec{f}$ è conservativo [VERO ✗] [FALSO]. (Ω è convesso $\Rightarrow$ Ω è semplic. connesso)

(b) Se $F : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ su un aperto che non è semplicemente connesso, allora $\vec{f} := \nabla F$ potrebbe non essere un campo conservativo [VERO] [FALSO ✗]. F è un potenziale $\Rightarrow$ f è conservativo

(c) Se f è una funzione T-periodica continua, allora la serie di Fourier associata a f converge uniformemente a f [VERO] [FALSO ✗]. Noto dalla teoria

(d) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora f è integrabile in senso improprio sul disco $B := \{x^2 + y^2 < 1\}$. [VERO ✗] [FALSO].

f continua su $\bar{B}$ (chiuso e limitato) $\Rightarrow$
f integrabile su $\bar{B}$ $\Rightarrow$ f integrabile su B
$\Rightarrow$ f int. in senso improprio su B

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 1 luglio 2017 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x,y) := x^2+2xy+2y^4$ e l'insieme $M := \{(x,y) : (x+y)^2 = 1\}$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (3p.).

   $(x,y) =$ $(0,0)$ punto di SELLA $(x,y) =$ $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ punto di MINIMO
   $(x,y) =$ $(-1/2, 1/2)$ punto di MINIMO $(x,y) =$ ______ punto di ______

   (b) Si dica se M è regolare (0,5p.) ~~SI~~ NO e se è limitato (0,5p.) ~~SI~~ NO.

   (c) Si dica se f ha massimo/minimo su M e in caso affermativo si calcolino tali valori (2p.):

   $\min_M f =$ 7/8 non esiste / $\max_M f =$ ______ ~~non esiste~~

Svolgimento

$f(x,y) = x^2+2xy+2y^4$. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+2y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x+8y^3$. $\nabla f = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x+y=0 \\ x+4y^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ 4x^3=x \end{cases} \Leftrightarrow$ $(x,y)=(0,0)$ OPPURE $\begin{cases} y=-x \\ 4x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $(x,y)=(0,0)$, $(x,y) = \pm\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24y^2$. DUNQUE $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ det < 0 PTO DI SELLA

$Hf\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = Hf\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ det $= 12-4 > 0$, $a_{11} = 2 > 0$ PUNTI DI MINIMO

L'INSIEME $M = \{(x+y)^2 = 1\} = \{x+y = \pm 1\} = \{y = 1-x\} \cup \{y = -1-x\}$ che è unione di due rette che non si intersecano. Dunque M è regolare ma non è limitato. Per la regolarità si può anche usare il Dini con $G(x,y) = (x+y)^2 - 1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} G = 2(x+y)$ $\frac{\partial}{\partial y} G = 2(x+y)$. Ne segue che $\nabla G = 0 \Leftrightarrow x+y=0$ MA $\{x+y=0\}$ è disgiunto da $\{x+y=\pm 1\}$ ($\Rightarrow$ M regolare). Per i max/min su M si può considerare "le restrizioni"

$\varphi_1(x) = f(x, 1-x)$ e $\varphi_2 = f(x, -1-x)$ cioè

$\varphi_1(x) = -x^2+2x+2(1-x)^4$, $\varphi_2(x) = -x^2-2x+2(1+x)^4$

È facile vedere che entrambe vanno a $+\infty$ se $|x| \to +\infty \Rightarrow$ NON ESISTE MAX. Per il minimo faccio la derivata di φ_1/φ_2:

$\varphi_1'(x) = -2x+2-8(1-x)^3 = (1-x)\left[2-8(1-x)^2\right]$ che vale zero $\Leftrightarrow$ $x=1$ oppure $4(1-x)^2 = 1$ $\Leftrightarrow$ $x=1$ / $x=\frac{1}{2}$ / $x=3/2$. In questi punti φ_1 vale 1 / $\frac{7}{8}$ / $\frac{7}{8}$. Analogamente $\varphi_2'(x) = -2x-2+8(1+x)^3 =$

$2(1+x)\left(-1+4(1+x)^2\right)$ che si annulla in $x=-1$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=-\frac{3}{2}$ a cui corrispondono gli stessi valori per φ_2, cioè $1 \;/\; \frac{7}{8} \;/\; \frac{7}{8}$ (in effetti $\varphi_2(x) = \varphi_1(-x)$)

IL VALORE MINIMO È $\boxed{7/8}$

Si poteva anche usare i moltiplicatori. Per esempio su $\{y = 1-x\}$ ho $G(x,y) = y+x-1 \Rightarrow \nabla G = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ e il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x+2y = \lambda \\ 2x+8y^3 = \lambda \\ x+y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ x+y=1 \\ x+4y^3=1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda=2 \\ x+y=1 \\ y = 4y^3 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda=2 \\ x+y=1 \\ y=0 \,/\, y=\frac{1}{2} \,/\, y=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

da cui $(x,y) = (1,0) \;/\; (x,y) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \;/\; (x,y) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ che mi dà gli stessi valori sopra $1 / \frac{7}{8} / \frac{7}{8}$

2. Si considerino l'insieme S e il campo vettoriale $\vec{f}$ definiti da:

$$S := \left\{(x,y,x) \,:\, x^2+y+z^2 = 1, y \geq 0\right\}, \qquad \vec{f}(x,y,z) := x^3y\vec{\mathbf{i}} + y^2z^2\vec{\mathbf{j}} - x^2yz\vec{\mathbf{k}}.$$

(a) Si trovi una parametrizzazione Γ che rende S (sostegno di) una superficie regolare avente normale $\vec{\nu}$ concorde con il versore $\vec{\mathbf{j}}$. (0,5p.)

$\Gamma(u,v) = \boxed{v\,\vec{i} + (1-u^2-v^2)\,\vec{j} + u\,\vec{k}}$

per $(u,v) \in \boxed{\{u^2+v^2 \leq 1\}}$.

(b) Si descriva il bordo di S con una curva regolare γ avente verso coerente con $\vec{\nu}$ (0,5p).

$\gamma(t) = \boxed{\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{k}}$

per $t \in \boxed{[0, 2\pi]}$.

(c) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso S (con la normale detta sopra) (3p.)

$$\int_S \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \boxed{\pi/12}$$

(d) Si usi il teorema di Stokes per calcolare il flusso di $\mathrm{rot}(\vec{f})$ attraverso S (2p.)

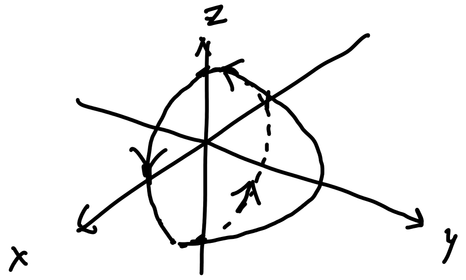
$\int_S \mathrm{rot}(\vec{f}) \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \boxed{0}$.

Svolgimento

Posso vedere S come grafico della funzione $y = 1-x^2-z^2$ per le (x,z) tali che $1-x^2-z^2 \geq 0$ e cioè per (x,y) con $x^2+z^2 \leq 1$. Questo corrisponde a $\Gamma(u,v) = (u, 1-u^2-v^2, v)$ su $\{u^2+v^2 \leq 1\}$ che mi dà

$\Gamma_u = \begin{pmatrix}1\\-2u\\0\end{pmatrix}$ $\Gamma_v = \begin{pmatrix}0\\-2v\\1\end{pmatrix}$ e $\vec{N} = \Gamma_u \otimes \Gamma_v = \begin{vmatrix} i & 1 & 0 \\ j & -2u & -2v \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = i(-2u) - j(1) + k(-2v) = -\begin{pmatrix}2u\\1\\2v\end{pmatrix}$ che è

DISCORDE CON $\vec{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Dunque devo invertire u e v per avere la normale concorde.
Per descrivere il bordo basta parametrizzare la circonferenza $\{u^2+v^2=1\}$: $u=\cos(t)$ $v=\sin(t)$
e "trasferirla" in $\mathbb{R}^3$ mediante T, cioè $\gamma(t) = T(\cos(t), \sin(t))$.



Per (c) usiamo il teorema della divergenza su
$\Omega = \{ 0 \le y \le 1 - x^2 - z^2 \}$ che ha come frontiera
$\partial\Omega = S \cup B$ dove $B = \{ y=0 \quad x^2+z^2 \le 1\}$

Noto che la normale uscente da Ω coincide con quella detta sopra quando sono su S e con $-\vec{j}$ su B.

Si ha $\operatorname{div}(\vec{f}) = \frac{\partial}{\partial x} x^3 y + \frac{\partial}{\partial y} y^2 z^2 - \frac{\partial}{\partial z} x^2 y z = 3x^2 y + 2yz^2 - x^2 y = 2y(x^2+z^2)$

$$\Rightarrow \iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{f}\, dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega} 2y(x^2+z^2)\, dx\,dy\,dz = \iint_{\{x^2+z^2\le 1\}} (x^2+z^2) \int_0^{1-x^2-z^2} 2y\, dy\, dx\,dz$$

$$= \iint_{\{x^2+z^2\le 1\}} (x^2+z^2)\left[y^2\right]_0^{1-x^2-z^2} dx\,dz = \iint_{\{x^2+z^2\le 1\}} (x^2+z^2)(1-x^2-z^2)^2\, dx\,dz = (\text{coord. polari})$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\, d\rho\, \rho^2 (1-\rho^2)^2 = 2\pi \int_0^1 \rho\, \rho^2 (1-\rho^2)^2\, d\rho \underset{(\rho^2=s)}{=} \pi \int_0^1 s(1-s)^2\, ds = \pi\left[\frac{s^2}{2} - \frac{2}{3}s^3 + \frac{s^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{12}$$

D'altra parte il flusso di $\vec{f}$ attraverso B è zero, dato che su B $y=0$
e $f_2(x,0,z)=0$ (anzi tutto $\vec{f}(x,0,z)=0$). Dunque il flusso di $\vec{f}$ attraverso $\partial\Omega$ coincide con il flusso di $\vec{f}$ attraverso S.

(d) Per Stokes $\iint_S \operatorname{rot}\vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}$ (γ è quella di prima che descrive il bordo di S)

$$= \int_0^{2\pi} \vec{f}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \vec{f}(\sin(t), 0, \cos(t))\cdot(\cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{k})\, dt =$$

$\underline{\underline{0}}$ perché tutte le componenti di $\vec{f}$ hanno il fattore y che vale zero sulla curva $\gamma(t)$

$$\left(\vec{f} = x^3 y\,\vec{i} + y^2 z^2\,\vec{j} - x^2 y z\,\vec{k}\right)$$

3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali: (iscritto prima del 2015-16 $\square$)

$$\begin{cases} x' = -3x + y \\ y' = -x - y + e^{-2t} \end{cases}$$

(a) Detta A la matrice associata al sistema si scrivano la forma canonica di Jordan per A (1p.)

$J = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$ e l'esponenziale (2p.) $e^{tA} = \boxed{e^{-2t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}}$

(b) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ (3p.)

$x(t) = \boxed{\frac{t^2}{2} e^{-2t}}$

$y(t) = \boxed{\left(t + \frac{t^2}{2}\right)e^{-2t}}$

Svolgimento

(a) La matrice A è $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ che ha pol. caratt. $P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$ $(3+\lambda)(1+\lambda) + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2$. Dunque $\lambda = -2$ è l'unico autovalore con molteplicità 2. Poniamo $B = A + 2I \iff$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ che ha rango 1 e $\dim \operatorname{Ker}(B) = 1 \neq 2$. Dunque la molt. geometrica di $\lambda = 1 < 2 \Rightarrow$ A NON DIAGONALIZZABILE e $J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Un autovalore $e_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è dato da $-x+y=0$ per esempio $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cerco e_2 tale che $Be_2 = e_1 \iff$

$\begin{cases} -x + y = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1 + x$ per esempio $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. DUNQUE

$A = MJM^{-1}$ con $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ne segue

$$e^{tA} = Me^{tJ}M^{-1} = M\begin{pmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}M^{-1} = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}.$$

(b) Applico la formula $Y(t) = e^{tA}\left(Y_0 + \int_0^t e^{-\tau A} B(\tau)\,d\tau\right)$ con

$Y_0 = 0$ $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix} \Rightarrow Y(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A} B(\tau)\,d\tau =$

$$\int_0^t e^{-2(t-\tau)} \begin{pmatrix} 1-(t-\tau) & t-\tau \\ \tau-t & 1+t-\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2\tau} \end{pmatrix} d\tau = e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} \begin{pmatrix} (t-\tau)e^{-2\tau} \\ (1+t-\tau)e^{-2\tau} \end{pmatrix} d\tau$$

$$= e^{-2t} \int_0^t \begin{pmatrix} t-\tau \\ 1+t-\tau \end{pmatrix} d\tau = e^{-2t} \left[\begin{pmatrix} \tau t - \frac{\tau^2}{2} \\ \tau + \tau t - \frac{\tau^2}{2} \end{pmatrix} \right]_0^t = e^{-2t} \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t + t^2/2 \end{pmatrix}$$

VERIFICA (Non richiesto)

$x(t) = \frac{t^2}{2} e^{-2t}$ $\quad x' = t e^{-2t} - t^2 e^{-2t} = (t-t^2) e^{-2t}$

$y(t) = \left(t + \frac{t^2}{2}\right) e^{-2t}$ $\quad y' = (1+t) e^{-2t} - (2t + t^2) e^{-2t} = (1 - t - t^2) e^{-2t}$

$$x' + 3x - y = \left(t - t^2 + \frac{3}{2} t^2 - t - \frac{t^2}{2}\right) e^{-2t} = 0$$

$$y' + x + y = \left(1 - t - t^2 + \frac{t^2}{2} + t + \frac{t^2}{2}\right) e^{-2t} = e^{-2t}$$ TORNA

4. Si consideri l'equazione differenziale

$$x(y'' - 2y') = 8y$$

Si cerchino le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ mediante una serie di potenze $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Si risponda in particolare ai sequenti quesiti.

(a) Si scriva una formula ricorsiva per i coefficienti a_n (2p.)

$$n(n+1) a_{n+1} = 2(n-4) a_n \quad \forall n \geq 0$$ $(\mathcal{R})$

(b) Esiste una soluzione y con $y(0) = 1$ SI $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$. Se la risposta è sì una soluzione è

$y(x) =$ (1p.).

(c) Esiste un'unica soluzione y con $y'(0) = 3$ $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ NO. Se la risposta è sì tale soluzione é

$y(x) =$ (*) (1p).

(d) Le soluzioni sono tutte dei polinomi SI $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$. Se la risposta è sì le $y(x)$ hanno grado minore o equale a ______________.(1p.)

Svolgimento

$y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$, $y'(x) = \sum_0^\infty a_n n x^{n-1}$, $y''(x) = \sum_0^\infty a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_0^\infty a_{n+1}(n+1) n x^{n-1}$

anche da 1

$$x(y''-2y')-8y=\sum_0^\infty a_{n+1}(n+1)n\,x^n-2\sum_0^\infty a_n n\,x^n-8\sum_0^\infty a_n x^n$$

$$=\sum_0^\infty\left(a_{n+1}\,n(n+1)-2a_n(n+4)\right)x^n .$$ Se eguaglio a zero trovo

$$n(n+1)a_{n+1}=2(n+4)a_n \quad \forall n\geq 0$$

La condizione R IMPLICA $a_0=0$ mentre per $n\geq 1$ diventa

$$a_{n+1}=\frac{2(n+4)}{n(n+1)}a_n \quad \forall n\geq 1 \qquad (R')$$

Il fatto che $a_0=0$ implica che tutte le soluzioni DEVONO verificare $y(0)=0$ da cui non è possibile che $y(0)=1$.

Inoltre è chiaro che (R') lascia libero il valore a_1 $(=y'(0))$.

Dunque per rispondere a (c) prendo $\underline{a_1=3}$ e uso (R'):

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{2(n+4)a_n}{n(n+1)} & \text{se } n\geq 1\\ a_1=3 \end{cases}$$

... MI DA' UNA SERIE CON TUTTI I TERMINI $\neq 0$ dato che $\frac{2(n+4)}{n(n+1)}\neq 0 \quad \forall n\geq 1$

Per vedere che la y così ottenuta è effettivamente soluzione devo mostrare che il raggio di convergenza della serie così trovata è >0. Applico il criterio del rapporto

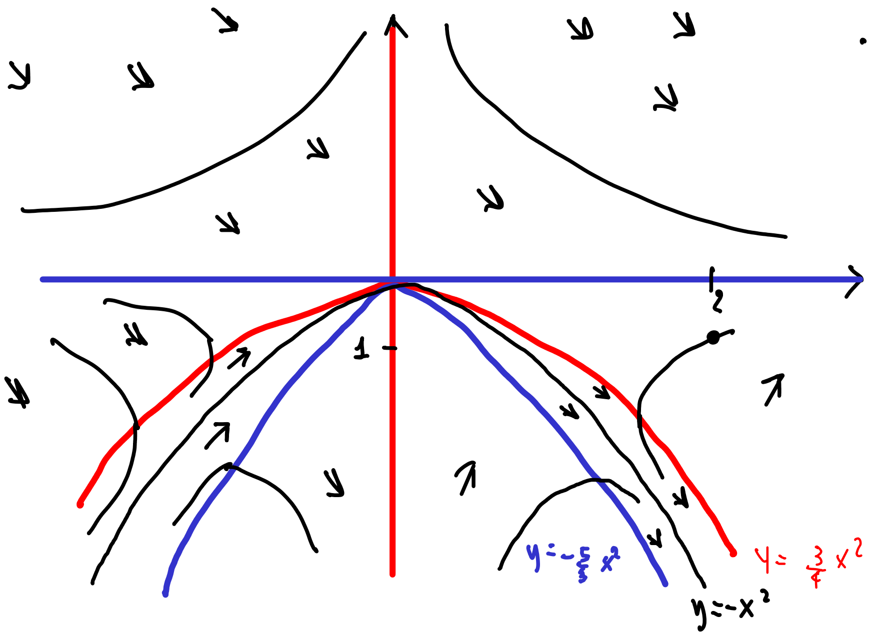
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+4)}{n(n+1)}=0 \Rightarrow R=+\infty \quad \underline{\underline{OK}}$$

((*) IL PUNTO (c) È STATO RIMOSSO DAL TESTO DURANTE LO SVOLGIMENTO)

Per quanto riguarda il punto (d) è chiaro da quanto detto sopra che, se $a_1\neq 0\Rightarrow a_n\neq 0\ \forall n\geq 1$ e quindi y NON È UN POLINOMIO

$$y' = -\frac{y(3y+5x^2)}{x(4y+3x^2)}$$

- NUMERATORE $= 0 \iff$ $y=0$ oppure $y = -\frac{5}{3}x^2$ (BLU)
- DENOMINATORE $= 0 \iff$ $x=0$ oppure $y = -\frac{3}{4}x^2$ (ROSSA)
- LA SOL. CON $y(1) = -1$ è $y(x) = -x^2$ (NERA)



(b) $\lambda(x,y) = \lambda(xy)$

$$\frac{\partial}{\partial y}\lambda(xy)(3y^2+5x^2y) = \frac{\partial}{\partial x}\lambda(xy)(4xy+3x^3)$$

$$\lambda'(xy)\,x(3y^2+5x^2y) + \lambda(xy)(6y+5x^2) = \lambda'(xy)\,y(4xy+3x^3) + \lambda(x,y)(4y+9x^2)$$

$$\lambda'(xy)(3xy^2+5x^3y-4xy^2-3x^3y) = \lambda(xy)(4y+9x^2-6y-5x^2)$$

$$\lambda'(xy)(-xy^2+2x^3y) = \lambda(xy)(-2y+4x^2)$$

$$xy\,\lambda'(xy)(2x^2-y) = \lambda(xy)\,2(2x^2-y) \qquad \lambda' = \frac{2}{\lambda} \qquad \boxed{\lambda = x^2y^2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 3x^2y^4+5x^4y^3 \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = 4x^3y^3+3x^5y^2$$

$$\phi(x,y) = x^3y^4 + x^5y^3 + c(y) \Rightarrow \phi_y = 4x^3y^3+3x^5y^2+c'(x)$$

$\Rightarrow c'=0$ prendo $c=0$ e $\boxed{\phi(x,y) = x^3y^3(y+x^2)}$

(c) Se parto da $(1,-1)$ Ho $\phi(x,y) = \phi(1,-1) = 1^3(-1)^3(-1+1) = 0$

quindi $y(x) = -x^2$