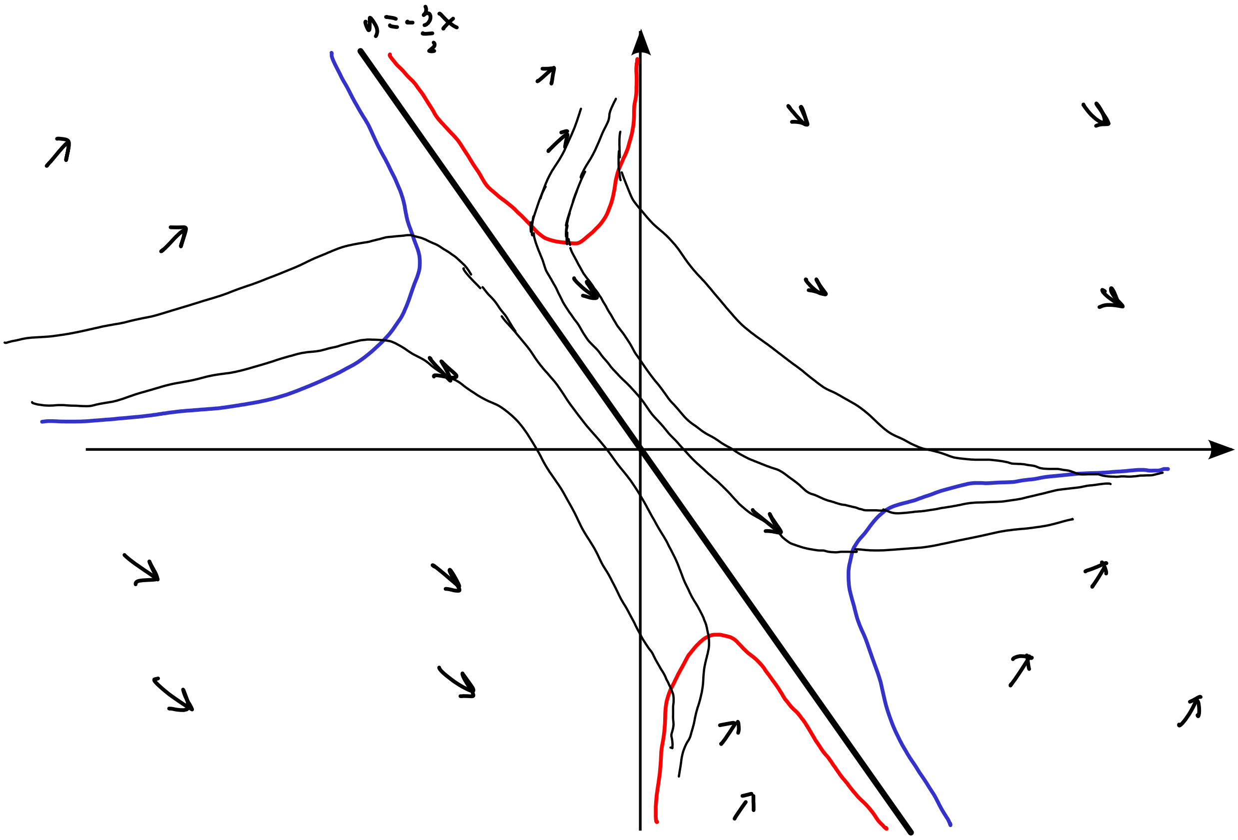
Variante esercizio 3 della seconda parte

Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{3 + 3xy + 2y^2}{2 + 2xy + 3x^2}$$

1. Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).



$2 + 2xy + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3x^2+2}{2x} = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{x}$ CURVA ROSSA $\left(y' = -\frac{3}{2} + \frac{1}{x^2} \ ; \ y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \ \ y = \mp\sqrt{6} \right)$

$3 + 3xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2y^2+3}{3y} = -\frac{2}{3}y - \frac{1}{y}$ CURVA BLU $\left(x' = -\frac{2}{3} + \frac{1}{y^2} \ ; \ x' = 0 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \ \ x = \mp\sqrt{\frac{8}{3}} \right)$

2. Si trovi un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x, y) = \lambda(xy)$. Si trovi poi un integrale primo 4p.).

Deve essere $\frac{\partial}{\partial y}\lambda(xy)(3+3xy+2y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(2+2xy+3x^2) \iff$

$x\lambda'(xy)(3+3xy+2y^2) + \lambda(xy)(3x+4y) = y\lambda'(xy)(2+2xy+3x^2) + \lambda(xy)(2y+6x) \iff$

$\lambda'(xy)(3x+\cancel{3x^2y}+\cancel{2xy^2}-2y-\cancel{2xy^2}-\cancel{3x^2y}) = \lambda(xy)(2y+6x-3x-4y) \iff$

$\lambda'(xy)(3x-2y) = \lambda(xy)(3x-2y) \iff \lambda' = \lambda \iff \lambda(t) = ce^t \quad c \in \mathbb{R}$

POSSO PRENDERE $\boxed{\lambda(xy) = e^{xy}}$. Cerchiamo l'integrale primo $\phi(x,y)$

a) $D_x\phi = e^{xy}(3+3xy+2y^2)$ (b) $D_y\phi = e^{xy}(2+2xy+3x^2)$. Da (a) ricavo

$\phi = (3+2y^2)\int e^{xy}dx + 3y\int xe^{xy}dx = (3+2y^2)\frac{e^{xy}}{y} + 3\cancel{y}\, x\frac{e^{xy}}{\cancel{y}} - 3\int e^{xy}dx =$

$\frac{3}{y}e^{xy} + 2ye^{xy} + 3xe^{xy} - 3\frac{e^{xy}}{y} + c(y) = (2y+3x)e^{xy} + c(y).$

IMPONGO (b) derivando l'espressione trovata rispetto a y: $2e^{xy} + x(2y+3x)e^{xy} + c'(y) =$ $(2+2xy+3x^2)e^{xy} + c'(y)$ deve essere uguale a $(2+2xy+3x^2)e^{xy}$. POSSO PRENDERE $c=0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\phi(x,y) = (2y+3x)e^{xy}}$$

3. Si trovi la soluzione $y(x)$ relativa al dato iniziale $(2,-3)$, e se ne riporti il grafico nel diagramma della pagina precedente (1p.)

Se calcolo $\phi(2,-3)$ trovo zero. Dunque la sol. $y(x)$ deve verificare $\phi(x,y(x)) = \phi(2,-3) = 0 \iff$

$(2y(x)+3x)e^{xy(x)} = 0 \iff \boxed{y(x) = -\frac{3}{2}x}$