COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 10 giugno 2017 - PARTE A[1]

1. Data $f(x,y) := (3x+y)^2$, il punto P di coordinate $(1,2)$ e il vettore $\vec{v} := 3\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}}$, si calcoli la derivata direzionale $f'(P)(\vec{v})$ (2p.)

f è C^1 e $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(3x+y)\cdot 3$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(3x+y) \Rightarrow \nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$

e $f'(1,2)\,\vec{v} = \nabla f(1,2)\cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{80}$

2. Data la funzione $G(x,y) := 4(x+y)xy + 1$ e posto $M := \{(x,y) : G(x,y) = 0\}$, si dica in quali punti (x_0, y_0) di M si può applicare il teorema del Dini per ricavare che M è localmente grafico di una funzione $x = g(y)$ (3p.)

Per applicare Dini vicino a un punto $P_0 \in M$ bisogna che $\frac{\partial G}{\partial x}(P_0) \neq 0$. Si ha

$\frac{\partial G}{\partial x} = 4xy + 4(x+y)y = 4y(x+x+y) = 4y(2x+y)$. I punti (x,y) su cui Dini non è applicabile devono allora verificare

$\begin{cases} 4(x+y)xy + 1 = 0 \\ 4y(2x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+y)xy = -1 \\ 2x+y = 0 \end{cases}$ (y=0 NON VA BENE) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4(-x)x(-2x) = -1 \\ y = -2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$

DUNQUE POSSO APPLICARE DINI IN TUTTI I PUNTI DI M TRANNE $P = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

[1] PUNTEGGIO MINIMO VotoA$\geq$5p. Voto=VotoA+VotoB ($0 \leq$ Voto ≤ 36) - Lode se Voto≥ 33

3. Data la curva $\gamma(t) := \cos(t)\vec{\mathbf{i}} + \sin(t)\vec{\mathbf{j}} + t\vec{\mathbf{k}}$, $0 \le t \le 2\pi$, si calcoli $\int_\gamma xyz\, ds$ (3p.)

$\gamma'(t) = -\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \|\gamma'\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2}$

$\int_\gamma xyz = \int_0^{2\pi} \cos(t)\sin(t)\, t\, \sqrt{2}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} t \sin(2t)\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{-t\cos(2t)}{2}\right]_0^{2\pi}$

$+ \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi} \cos(2t)\,dt = -\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 2\pi + \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{2\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

4. Si trovi il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(1+n^2)3^n} x^n$ (1p.) e si dica per quali x la serie converge (1p.)

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(1+n^2)}\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{1+n^2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{R = 3}$

$\Rightarrow$ la serie
- CONVERGE su $]-3, 3[$
- NON CONV. FUORI $[-3, 3]$

Se $x = 3$ TROVO $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} = +\infty$

Se $x = -3$ TROVO $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1+n^2}$ CONVERGE PER LEIBNIZ

$\Rightarrow$ LA SERIE CONVERGE se $\boxed{x \in [-3, 3[}$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Se un campo $\vec{f}$ (regolare quanto serve) è conservativo allora:
$\boxed{\mathrm{grad}\vec{f} = \vec{0}}$, $\boxed{\cancel{\mathrm{rot}\vec{f} = \vec{0}}}$, $\boxed{\mathrm{div}\vec{f} = 0}$ $\boxed{\vec{f} \text{ ammette potenziale vettore}}$ $\boxed{\text{n. d. p.}}$

(b) Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ su un aperto Ω di $\mathbb{R}^3$, allora per ogni x di Ω la matrice hessiana di f in x è una matrice diagonalizzabile $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$. (perché è simmetrica)

(c) Sia data una funzione f. Se per ogni $\vec{v}$ esistono le derivate direzionali $x \mapsto f'(x)(\vec{v})$ continue rispetto a x, allora f è differenziabile $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$. (teor. del diff. totale)

(d) Se $\Gamma : \Omega \to \mathbb{R}^N$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ con Ω aperto regolare di $\mathbb{R}^2$, allora si può affermare che $\Gamma(\Omega)$ è il sostegno di una superficie parametrica regolare. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\cancel{\text{FALSO}}}$.
(deve anche essere $\Gamma_u \times \Gamma_v \neq 0$)

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 10 giugno 2017 - PARTE B   Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) := x^2 + 4y^2 + 20 \arctan(xy)$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (4p.).

$D_x f = 2x + \frac{20y}{1+x^2y^2}$

$D_y f = 8y + \frac{20x}{1+x^2y^2}$

$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-10y}{1+x^2y^2} \\ 4y = \frac{-10x}{1+x^2y^2} \end{cases} \nearrow$

$4y = \frac{100y}{(1+x^2y^2)^2} \Leftrightarrow y=0$ oppure $\frac{10}{1+x^2y^2} = 2 \Leftrightarrow$

$y = 0$ oppure $x^2y^2 = 4$

Se $y = 0 \Rightarrow x = 0$ se no

$\begin{cases} x = -2y \\ x^2y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ y^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp 2 \\ y = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow$ TRE PTI CRITICI $(0,0), \pm(2,-1)$

$D_{xx} f = 2 + 20y \frac{-2xy^2}{(1+x^2y^2)^2} = \boxed{2 - \frac{40xy^3}{(1+x^2y^2)^2}}$ $\quad D_{yy} f = \boxed{8 - \frac{40x^3y}{(1+x^2y^2)^2}}$

$D_{xy} f = \frac{20(1+x^2y^2) - 20y\, 2x^2y}{(1+x^2y^2)^2} = \boxed{\frac{20(1-x^2y^2)}{(1+x^2y^2)^2}}$. Ne segue

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 20 \\ 20 & 8 \end{pmatrix}$ che ha determinante $16 - 400 < 0 \Rightarrow$ (0,0) è pto di sella.

$H_f(2,-1) = \begin{pmatrix} 2 - \frac{40 \cdot 2 \cdot (-1)^3}{(1+4)^2} & \frac{20(1-4)}{(1+4)^2} \\ \frac{20(1-4)}{(1+4)^2} & 8 - \frac{40(2)^3(-1)}{(1+4)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 130 & -60 \\ -60 & 520 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 26 & -12 \\ -12 & 104 \end{pmatrix}$

che ha det > 0 e $a_{11} = \frac{105}{25} > 0 \Rightarrow$

(2,-1) è pto di minimo   Stesso discorso per $(-2,1)$

   (b) Si dica se f ha massimo o minimo assoluto e in caso affermativo se ne calcolino i valori(1p.).

Si ha $f(x,y) \geq x^2 + 4y^2 - 20\frac{\pi}{2} \geq x^2 + y^2 - 10\pi = \|(x,y)\|^2 - 10\pi$

Ne segue che $\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = +\infty$. Da questo deduco che

(a) $\sup f = +\infty \Rightarrow$ NON ESISTE MASSIMO

(b) esiste il minimo.

Per la prima parte $\min f = f(2,-1) = f(-2,1) = 4 + 8 + 20\arctan(-2) = 12 - 20\arctan(2)$

2. Si considerino l'insieme

$$S := \left\{(x, y, x) \, : x^2 + y^2 + z^2 = 2, x \geq 1\right\}.$$

e il campo vettoriale $\vec{f}(x, y, z) := xz^2(2xe^y\vec{\mathbf{i}} + (y - e^y)\vec{\mathbf{j}} - ze^y\vec{\mathbf{k}})$.

(a) Si trovi una parametrizzazione Γ che rende S una superficie regolare con normale concorde con il versore $\vec{\mathbf{i}}$. (1p.)

Posso prendere $\Gamma(u,v) = \left(\sqrt{2-u^2-v^2}, u, v\right)$ $\quad (u,v) \in B := \{u^2+v^2 \leq 1\}$

In questo modo $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial u} = \left(\dfrac{-u}{\sqrt{2-u^2-v^2}}, 1, 0\right)$ $\quad \dfrac{\partial \Gamma}{\partial v} = \left(\dfrac{-v}{\sqrt{2-u^2-v^2}}, 0, 1\right)$

$\Rightarrow \vec{N} : \dfrac{\partial \Gamma}{\partial u} \otimes \dfrac{\partial \Gamma}{\partial v} = \left(1, \dfrac{u}{\sqrt{2-u^2-v^2}}, \dfrac{v}{\sqrt{2-u^2-v^2}}\right)$ e quindi

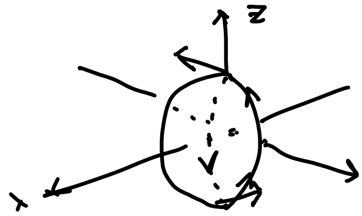
$\|\vec{N}\| = \sqrt{1 + \dfrac{u^2}{2-u^2-v^2} + \dfrac{v^2}{2-u^2-v^2}} = \sqrt{\dfrac{2}{2-u^2-v^2}} \neq 0$ (finito in $\{u^2+v^2<1\}$)

LA NORMALE È CONCORDE CON i dato che $\vec{N} \cdot \vec{i} = 1 > 0$

(b) Si descriva il bordo di S con una curva regolare γ avente verso coerente con la normale detta sopra (1p).

Si può prendere $\gamma(t) = \vec{i} + \cos\theta \, \vec{j} + \sin\theta \, \vec{k}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow \gamma'(t) = -\sin(t)\,\vec{j} + \cos(t)\,\vec{k}$



(c) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso $\partial\Omega$, dove $\Omega := \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x \geq 1\}$ (4p.)

Applico il teorema della divergenza su Ω. Si ha

$\operatorname{div}(\vec{f}) = \dfrac{\partial}{\partial x} 2x^2z^2e^y + \dfrac{\partial}{\partial y} xz^2(y-e^y) + \dfrac{\partial}{\partial z} xz^3e^y = 4xz^2e^y + xz^2(1-e^y) + 3xz^2e^y$

$= xz^2$. Calcolo $\iiint_\Omega xz^2 \, dx\, dy\, dz =$ (coord. cilindriche $x=x$, $y=\rho\cos\theta$, $z=\rho\sin\theta$)

$\iiint_{\{0\leq\theta\leq 2\pi,\ x^2+\rho^2\leq 2,\ x\geq 1\}} x\,\rho^2\sin^2\theta\,\rho\,d\rho = \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta \int_0^1 \rho^3\,d\rho \int_1^{\sqrt{2-\rho^2}} x\,dx =$

$\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta \int_0^1 \rho^3\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{2-\rho^2}} d\theta = \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta \int_0^1 \rho^3(2-\rho^2-1)\,d\rho$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho^3(1-\rho^2)\,d\rho = \frac{\pi}{4}\int_0^1 s(1-s)\,ds = \frac{\pi}{4}\left[\frac{s^2}{2}-\frac{s^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\,\frac{1}{6} = \frac{\pi}{24}$$

3. Si consideri il sistema di equazioni differenziali: (iscritto prima del 2016 ☐)

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x \\ z' = 2x - 2y - z \end{cases}$$

(a) Si scriva la matrice A associata al sistema e si trovino gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica (1p.)

$$\left[A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\right] \qquad p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(1+\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -(1+\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1)$$

RADICI di $P(\lambda)$ $\quad \boxed{\lambda_1 = -1 \text{ semplice} \quad \lambda_2 = 1 \text{ DOPPIA}}$

(b) Si si trovi una base di autovettori generalizzati di A e si scriva la corrispondente matrice J relativa alla forma canonica di Jordan. (2p.)

un autovalore per $\lambda_1 = -1$ è tale che $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z \text{ qualunque} \end{array}$ $\quad \left[e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

un autov. per $\lambda_2 = 1$ è tale che $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=y \\ z=0 \end{array}$ $\quad \left[e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

Calcolo $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ e cerco $e_3 \in \operatorname{Ker} B^2$ con $Be_3 = e_2 \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} -4x+4y+4z=0 \\ x-y = 1 \\ x-y = 1 \\ 2x-2y-2z=0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+z \\ x = 1+y \end{cases}$$

posso prendere $\left[e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ ALLORA $\left[J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

Inoltre $A = MJM^{-1}$ dove $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) Si scriva la soluzione del sistema con dato iniziale $x(0) = 2$, $y(0) = 0$, $z(0) = 2$ (3p.).

Se $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ e $Y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ si ha $Y(t) = e^{tA} Y_0 = M e^{tJ} M^{-1} Y_0$

Trovo $W_0 = M^{-1} Y_0$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 2 \\ y = 0 \\ x + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} z = 2 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow W_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ te^t \\ e^t \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} te^t + e^t \\ te^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= 2e^t(1+t) \\ y(t) &= 2t\,e^t \\ z(t) &= 2e^t \end{aligned}}$$

4. Sia data la funzione $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) := t(\pi - t)$.

(a) Si calcoli lo sviluppo di Fourier in soli seni di f (cioè $f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\tilde{\omega}t)$ [*]) (3p.)

$$\tilde{\omega} = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{\pi} = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} b_n = \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt =$$

$$\underbrace{\left[f(t) \frac{\cos(nt)}{-n} \right]_0^{\pi}}_{f(0) = f(\pi) = 0 \;\to\; \text{ZERO}} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} f'(t) \cos(nt)\, dt = \frac{1}{n} \left[f'(t) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi}$$

$\sin(n \cdot 0) = \sin(n \cdot \pi) = 0$
$\to$ ZERO

$$- \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi} f''(t) \sin(nt) = \frac{-1}{n^2} \int_0^{\pi} (-2) \sin(nt)\, dt = \frac{2}{n^2} \left[\frac{\cos(nt)}{-n} \right]_0^{\pi} =$$

$$- \frac{2}{n^3} \left((-1)^n - 1 \right) = 2 \left(\frac{1 - (-1)^n}{n^3} \right) \Rightarrow b_n = \frac{-4}{\pi n^3} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ PARI} \\ -\dfrac{8}{\pi n^3} & n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

(b) Si dica se la serie trovata converge uniformemente a f (1p.)

Dato che $\sum_{1}^{\infty} |b_n| \leq 2\pi \sum \frac{1}{n^3} < +\infty$ la convergenza è uniforme

(c) Si dica se si può derivare per serie in [∗] (1p.)

Dato che $\sum_{1}^{\infty} n|b_n| \leq 2\pi \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

anche le derivate convergono unif. a f' e si può derivare per serie