COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2.

1. Siano dati

$$S := \{(x, y, z) : (x+1)^2 = z^2 + y^2, -1 \le x \le 0\},$$
$$\vec{f} := -\cos(xy)\vec{\mathbf{i}} + \sin(xy)\vec{\mathbf{j}} - z(y\sin(xy) + x\cos(xy))\vec{\mathbf{k}}$$

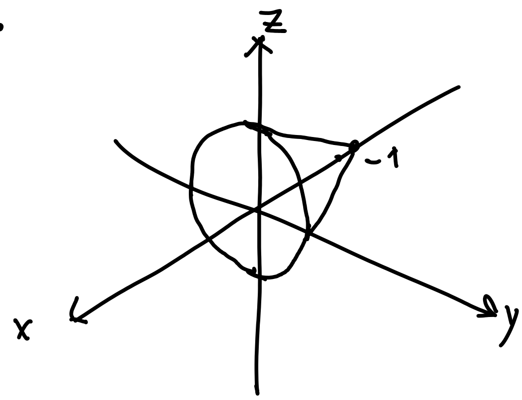
(a) Si trovi una parametrizzazione che rende S una superficie regolare (tranne che in un punto) (2p.).

Si può vedere S come grafico $x = g(y,z)$ dove $g(y,z) = -1 + \sqrt{y^2+z^2}$ e $(y,z) \in A = \{y^2+z^2 \le 1\}$. Così facendo la parametrizzazione $T : A \to \mathbb{R}^3$ è data da

$$T(u,v) = g(u,v)\vec{i} + u\vec{j} + v\vec{k} \qquad (u,v) \in A$$

e la normale $\vec{N}(u,v) = \vec{i} - \frac{\partial g}{\partial u}\vec{j} - \frac{\partial g}{\partial v}\vec{k}$

cioè $\vec{N}(u,v) = \vec{i} - \frac{y}{\sqrt{z^2+y^2}}\vec{j} - \frac{z}{\sqrt{z^2+y^2}}$



N.B. g è differenziabile tranne che in $(0,0)$

(b) Si calcoli (6p.) $\int_S x \, d\sigma$.

Dalla espressione sopra abbiamo $\|\vec{N}(u,v)\| = \sqrt{1 + \frac{y^2}{z^2+y^2} + \frac{z^2}{z^2+y^2}} = \sqrt{2}$ da cui

$$\iint_S x\, d\sigma = \iint_A g(y,z)\,dy\,dz = \iint_A \left(-1 + \sqrt{y^2+z^2}\right)\sqrt{2}\,dy\,dz = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (-1+\rho)\rho\, d\rho$$

$$= 2\sqrt{2}\pi\left[-\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 = 2\sqrt{2}\pi\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$$

(c) Si mostri che $\vec{f}$ ammette un potenziale vettore $\vec{F}$ e si calcoli un possibile $\vec{F}$ (6p.).

$\operatorname{div}\vec{f} = y\sin(xy) + x\cos(xy) - (y\sin(xy) + x\cos(xy)) = 0 \Rightarrow \exists$ pot. vettore.

Cerco $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$ da cui

$$-\frac{\partial F_2}{\partial z} = f_1 \Rightarrow F_2(x,y,z) = -\int f_1(x,y,z)\,dz = \int \cos(xy)\,dz = z\cos(xy) + c(x,y)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = f_2 \Rightarrow F_1(x,y,z) = \int f_2(x,y,z)\,dz = \int \sin(xy)\,dz = z\sin(xy) + d(x,y)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = f_3 \Rightarrow -zy\sin(xy) + \frac{\partial c}{\partial x} - zx\cos(x,y) - \frac{\partial d}{\partial y} = -z(x\cos(xy) + y\sin(xy))$$

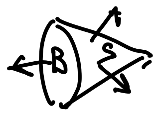
POSSO PRENDERE $c = d =$ e quindi

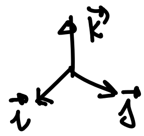
$$\vec{F}(x,y,z) = z\left(\sin(xy)\vec{i} + \cos(xy)\vec{j}\right)$$

(d) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso S considerando su S la normale concorde con $\vec{\mathbf{i}}$ (6p.).

Consideriamo $\Omega := \{-1 \le x \le 0 \quad y^2+z^2 \le (x+1)^2\}$. Allora

$\partial\Omega = S \cup B$ dove $B = \{x=0,\ y^2+z^2 \le 1\}$





Per il teorema della divergenza

$$0 = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{f} = -\iint_S \vec{f}\cdot\vec{\nu} + \iint_B \vec{f}\cdot\vec{i} \quad ,$$

dove $\vec{\nu}$ è la normale concorde con $\vec{i}$ e si è messo il meno perché $\vec{\nu}$ è entrante in Ω; è chiaro che la normale uscente è $\vec{i}$ su B. Si ha

$$\iint_B \vec{f}\cdot\vec{i} = \iint_{\{y^2+z^2\le1\}} f_1(0,y,z)\,dy\,dz = -\iint_{\{y^2+z^2\le1\}} \cos(0)\,dy\,dz = -|\{y^2+z^2\le1\}| = -\pi$$

Dalla formula (*) $\Rightarrow \displaystyle\iint_S \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = -\pi$

(e) Si calcoli (4p)

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

dove $\gamma(t) := \cos(t)\vec{\mathbf{j}} + \sin(t)\vec{\mathbf{k}}$.

Lo curva descrive la circonferenza che fa da bordo a B (e a S) ed è coerente con la normale $\vec{\nu} = \vec{i}$ su B. Applicando Stokes

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_B \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \iint_B \vec{f} \cdot \vec{i}\, d\sigma = -\pi$$

2. Si trovi la soluzione del seguente sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} x' = -2x + y & x(0) = 0 \\ y' = -x + t & y(0) = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

pol. car. $p(\lambda) = (-2-\lambda)(-\lambda) + 1 = 2\lambda + \lambda^2 + 1 = (\lambda+1)^2$

$\Rightarrow$ un solo autovalore $\lambda = -1$

$B := A - \lambda I = A + I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 1 $\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} = 1$

A NON DIAGONALIZZABILE $\qquad J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

un autovettore e_1 è $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Cerco $e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $Be_2 = e_1 \Leftrightarrow -x + y = 1$ per esempio $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

In questo modo

$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$e^{-t}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-t&t\\-1&1\end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix}1-t&t\\-t&t+1\end{pmatrix}$$

se $Y(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$Y(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A} B(\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{-(t-\tau)}\begin{pmatrix}1-(t-\tau) & t-\tau\\ -(t-\tau) & (t-\tau)+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \tau\end{pmatrix}d\tau$$

$$e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\begin{pmatrix}\tau(t-\tau)\\ \tau(t-\tau)+\tau\end{pmatrix}d\tau \quad = (*)$$

$$\int_0^t e^\tau \tau(t-\tau)\,d\tau = \underbrace{\left[e^\tau\tau(t-\tau)\right]_0^t}_{=0} - \int_0^t e^\tau(t-2\tau)\,d\tau =$$

$$-\left[e^\tau(t-2\tau)\right]_0^t - 2\int_0^t e^\tau = te^t + t - 2e^t + 2$$

$$\int_0^t \tau e^\tau\, d\tau = \left[\tau e^\tau\right]_0^t - \int_0^t e^\tau d\tau = te^t - e^t + 1$$

$$(*) = e^{-t}\begin{pmatrix} te^t + t - 2e^t + 2 \\ 2te^t + t + 3 - 3e^t\end{pmatrix} = \begin{matrix} t-2+(t+2)e^{-t}\\ 2t-3+(t+3)e^{-t}\end{matrix} \qquad \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$$

dunque $\quad x(t) = (t+2)e^{-t} + t - 2$

$\qquad\qquad y(t) = (t+3)e^{-t} + 2t - 3$

$$x' + 2x - y = 1 + e^{-t} - te^{-t} - 2e^{-t} + 2t - 4 + 2te^{-t} + 4e^{-t} - 2t + 3 - te^{-t} - 3e^{-t}$$
$$= 0$$

$$y' + x = \cancel{2} + \cancel{e^{-t}} - \cancel{te^{-t}} - 3e^{-t} + t - \cancel{2} + \cancel{t}e^{-t} + 2\cancel{e}^{-t} \quad = t \qquad \text{OK.}$$