COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino dell' 11 aprile 2017 - C

1. Sia data la serie di potenze $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{1+4^n} x^n$.

   (a) Si calcoli il raggio di convergenza di della serie (2p.);

$$\sqrt[n]{\frac{m 2^n}{1+4^n}} = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\downarrow\, 1} \; \frac{2}{4} \; \frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{4^{-n}+1}}_{\downarrow\, 1}} \to \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{R = 2}$$

   (b) si dica quanto fa $f''(0)$ (se esiste)(2p.)

($f''(0)$ esiste perché $R>0$) Se $a_m := \frac{m\, 2^n}{1+4^m}$ allora

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!} \Leftrightarrow f''(0) = 2\, a_2 = 2 \, \frac{2\, 2^2}{1+4^2} = \frac{4 \cdot 4}{1+16} = \boxed{\frac{16}{17}}$$

2. Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$x^2 y'' + (x-1)y' - 9y = x.$$

Si cerchi la soluzione come una serie di potenze centrata in zero: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. In particolare

   (a) si trovi una relazione ricorsiva per i coefficienti a_n (4p.);

$$x = x^2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m\, m(m-1)\, x^{n-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_m\, m\, x^{n-1} - \sum_{n=0 \leftarrow m-1}^{\infty} a_m\, n\, x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 9 a_m x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_m\, m(m-1)\, x^m + \sum_{n=0}^{\infty} a_m\, m\, x^n - \sum_{m=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 9 a_m x^n$$

$$= \sum \left[(m^2 - \cancel{m} + \cancel{m} - 9)\, a_n - (m+1)\, a_{n+1} \right] x^n$$

DUNQUE TROVO

$$\boxed{(m^2 - 9)\, a_m - f_m = (m+1)\, a_{m+1} \quad \forall m \geq 0}$$

DOVE $f_m = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq 1 \\ 1 & \text{se } m = 1 \end{cases}$

VOLENDO POSSO SCRIVERE

$a_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario

$a_1 = -9a_0 \quad (m=0)$ e $m^2 - 9a_m = (m+1)a_{m+1} \quad \forall m \geq 2$

$a_2 = \frac{-8a_1 - 1}{2} = 36a_0 - \frac{1}{2} \quad (m=1)$

$a_3 = \frac{-5a_2}{3} = -60a_0 + \frac{5}{6} \quad (m=2)$

$a_4 = 0$ e allora $a_m = 0 \quad \forall m \geq 4$

(b) si mostri che le soluzioni sono polinomi (2p.);

Dato che per $m=3$ trovo $4a_4 = 0 \Rightarrow a_4 = 0$, per ricorrenza $a_m = 0 \quad \forall m \geq 4$. Dunque y è un polinomio di grado 3

(c) si scrivano esplicamente tutte le soluzioni tali che $y(0) = 0$ (se ne esistono) (2p.).

Dai conti fatti sopra, se metto $a_0 = 0$, trovo $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{5}{6}$

da cui $y(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3$.

3. Sia data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{16n^4 + x^4}$.

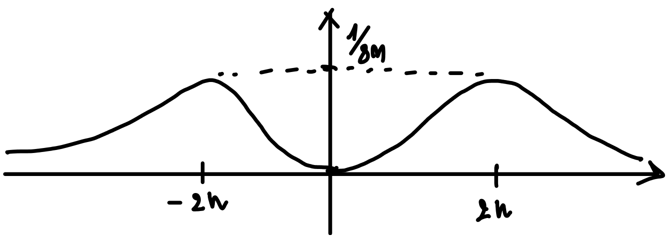
(a) Si dica se la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$ (1p.)

sì perché dato $x \in \mathbb{R}$ il termine $a_n = \frac{mx^2}{16n^4 + x^4}$ è asintotico a $\frac{1}{m^3}$ e ($a_n \geq 0$)

quindi $\sum_n a_n$ converge

Faccio a parte un rapido studio di funzione per $f_m(x) = \frac{mx^2}{16m^4 + x^4}$. Si ha

$\lim_{x \to \pm\infty} f_m(x) = 0$, $f_m(0) = 0$, f_m PARI, $f_m'(x) = \frac{2nx(16n^4 - x^4)}{(16m^4 + x^4)^2}$. ALLORA



. pti di max sono in $x = \pm 2n$ e

$f_m(\pm 2n) = \frac{m\,4n^2}{16n^4 + 16n^4} = \frac{1}{8m}$

(b) Si dica se la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$ (2p.)

Dal grafico di f_n fatto sopra deduco che $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1}{8n}$.

Dato che $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow$ $\boxed{\text{NON C'È CONV. TOTALE SU } \mathbb{R}}$

(c) Si dica se la somma della serie è continua (nei punti in cui esiste) (5p.)

Se fisso $M>0$ e mi metto su $[-M,M]$ vedo dal grafico di f_n che

$$\|f_n\|_{\infty,[-M,M]} = \max_{[-M,M]} f_n = \begin{cases} \frac{1}{8n} & \text{se } 2n \leq M \\ \frac{nM^2}{16n^4+M^4} & \text{se } 2n \geq M \end{cases}.$$

Dato che i termini con $2n \leq M$ sono un numero finito si ho

$\|f_n\|_{\infty,[-M,M]} \simeq \frac{nM^2}{16n^4+M^4} \simeq \frac{M^2}{16n^3}$ che è sommabile. Dunque $\sum f_n$ converge TOTALMENTE su $[-M,M] \Rightarrow S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è continua in $[-M,M]$.

Dato che M è arbitrario $\Rightarrow$ $\boxed{S(x) \text{ è continua } \forall x \in \mathbb{R}}$

(d) Si dica se la serie converge uniformemente su $\mathbb{R}$ (2p.)

Se ci fosse conv. unif. avrei $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$.

Però se fisso $m \in \mathbb{N}$ trovo.

$$S(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, m^2}{16n^4+m^4} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{n\, m^2}{16m^4+m^4} \geq \sum_{n=1}^{m} n \frac{m^2}{16m^4+m^4} = \frac{1}{17m^2} \sum_{n=1}^{m} n =$$

(devo ricordarmi la formula ...) $\frac{1}{17m^2} \cdot \frac{m(m+1)}{2}$. Si vede allora che

$\lim_{m\to\infty} S(m) \geq \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{2} > 0$ per cui non è possibile che $S(x) \to 0$ per $x \to \infty$

$\boxed{\text{DUNQUE NON C'È CONV. UNIF. SU } \mathbb{R}}$

(e) Si dica se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x^2}{16n^4+x^4}}$ converge in energia su $\mathbb{R}$ (2p.)

$$\|g_n\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4\,dx}{(16n^4+x^4)^2} = \quad (\text{pongo } x^4 = n^4y^4 \leftrightarrow y = \tfrac{x}{n} \Rightarrow dx = n\,dy)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^4y^4\,n\,dy}{(16n^4+y^4n^4)^2} = \frac{n^5}{n^8}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^4}{(16+y^4)^2}\,dy = \frac{A}{n^3}$$

(dove $A<+\infty$ perché l'integranda a $+\infty$ è $\simeq \frac{y^4}{y^8} = \frac{1}{y^3}$ e $3>1$)

Dunque $\|g_n\|_2 = \frac{\sqrt{A}}{n^{3/2}}$ che è sommabile dato che $\frac{3}{2}>1$.

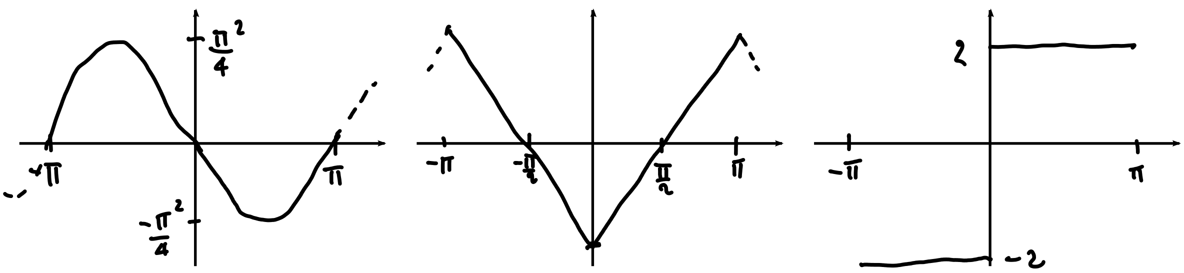
Ne segue che la serie $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} g_n \text{ converge in energia}}$

4. Data la funzione f definita da

$$f(t) := \begin{cases} t^2 - \pi t & \text{se } 0 \le t \le \pi, \\ -t^2 - \pi t & \text{se } -\pi \le t \le 0 \end{cases}$$

ed estesa a $\mathbb{R}$ in modo da essere 2π-periodica:

(a) si traccino i grafici di f, f' ed f'' (1p.);



(b) si calcolino i coefficienti di Fourier di f (5p.);

f dispari $\Rightarrow$ $a_n = 0 \ \forall n$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \underbrace{\frac{2}{\pi}\left[f(t)\frac{\cos(nt)}{-n}\right]_0^{\pi}}_{f(0)=f(\pi)=0 \Rightarrow \text{VIENE } 0}$$

$$+ \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} f'(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{n\pi}\left[f'(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi} f''(t)\sin(nt)\,dt =$$

$\sin(0)=\sin(n\pi)=0 \Rightarrow$ VIENE 0 $\qquad f'' = 2$

$$= -\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt = -\frac{4}{n^2\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{-n}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{n^3\pi}\left(\cos(n\pi)-\cos(0)\right) = \boxed{\frac{4}{\pi}\,\frac{(-1)^n-1}{n^3}}$$

Notiamo che

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ -\frac{8}{\pi}\frac{1}{n^3} & n \text{ DISPARI} \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-8}{\pi}\right)\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\big((2k+1)t\big)}$$

(c) si usi quanto trovato per calcolare la somma dell serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ (2p.);

Se metto $t = \frac{\pi}{2}$ nella formula sopra $\Rightarrow$ $-\frac{\pi^2}{4} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \underbrace{\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}_{=(-1)^k}$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}}$$

(d) si dica se la serie delle derivate converge puntualmente alla derivata di f (2p.);

Dato che $\sum_{n=0}^{\infty} n|b_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{1}{n^2}$ è convergente $\Rightarrow$ la serie delle derivate CONVERGE UNIF. (DUNQUE PUNTUALMENTE) a f'

(e) si usi quanto trovato per dire se il problema differenziale

$$\begin{cases} y'' + 16y = t^2 - \pi t \quad \text{su } [0, \pi] \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

ha soluzione e se ha soluzione unica (2p.).

Notiamo che essendo f dispari i coeff. b_n che abbiamo trovato COINCIDONO con quelli dello sviluppo in soli seni sull'intervallo $[0, \pi]$. Da quanto visto a lezione si ha che l'eq. sopra ha sol. unica $\Leftrightarrow$ $16 \neq n^2 \tilde{\omega}^2$ $\forall n$ e cioè $\left(\tilde{\omega} = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{\pi} = 1\right)$ $16 \neq n^2$ $\forall n$. QUESTO È FALSO PER $n = 4$. Dunque la sol., se esiste, non è unica. Inoltre, sempre dalla teoria, si ha che la soluzione esiste se e solo se $b_4 = 0$. Dato che 4 è PARI QUESTO È VERO.

In definitiva il problema ha infinite soluzioni (una particolare più $c \sin(4t)$, $c \in \mathbb{R}$).