COGNOME:

NOME:

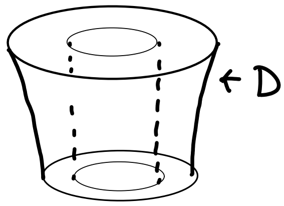
MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Secondo compitino - 24 febbraio 2107

1. Si calcoli il volume dell'insieme (9 p.)

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 1 \le x^2 + y^2 \le 9 + z^2, 0 \le z \le 4\}.$$

Possiamo passare a coordinate cilindriche



$$|D| = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 dz \int_1^{\sqrt{9+z^2}} \rho \, d\rho =$$

$$2\pi \int_0^4 dz \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_1^{\sqrt{9+z^2}} =$$

$$\pi \int_0^4 (9+z^2-1)\, dz = \pi \left[8z + \frac{z^3}{3} \right]_0^4$$

$$= \pi \left(32 + \frac{64}{3} \right) = \boxed{\frac{160}{3}\pi}$$

2. Si calcoli l'integrale (9 p.)

$$\iint_D \frac{|x^2-y^2|}{1+x^2y^2}\,dxdy \qquad \text{dove } D := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 0\le x-y\le 1,\ 0\le xy\le x-y\}.$$

Si suggerisce di usare la sostituzione $t = x-y$ $w = xy$.

Se $\phi(x,y) = \begin{pmatrix} x-y \\ xy \end{pmatrix} \Rightarrow J_\phi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ y & x \end{pmatrix} \Rightarrow |\det J_\phi| = |x+y|$

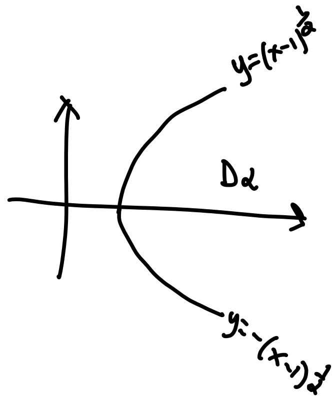
$\Rightarrow$ INTEGRALE $= \iint_{D_1} \frac{t}{1+w^2}\,dt\,dw$ dove $\{0\le t\le 1,\ 0\le w\le t\}$

$= \int_0^1 t\,dt \int_0^t \frac{dw}{1+w^2} = \int_0^1 t \arctan t\,dt = \frac{t^2}{2}\arctan(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{2}\frac{1}{1+t^2}\,dt =$

$\frac{1}{2}\arctan(1) - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\arctan(t)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

3. Si trovi per quali $\alpha > 0$ risulta convergente il seguente integrale improprio (9 p.)

$$\int_{D_\alpha} \frac{y^2}{x^4}\,dxdy \quad \text{dove } D_\alpha := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y|^\alpha \le (x-1)\right\}.$$



$$= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} \int_{-(x-1)^{1/\alpha}}^{(x-1)^{1/\alpha}} y^2\,dy = 2\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{(x-1)^{1/\alpha}} =$$

$$\frac{2}{3}\int_1^{+\infty} \frac{(x-1)^{3/\alpha}}{x^4}\,dx$$

. L'INTEGRANDO all'infinito è asintotico a $\frac{x^{3/\alpha}}{x^4} = \frac{1}{x^{4-3/\alpha}}$

DUNQUE L'INTEGRALE È CONVERGENTE $\iff \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{4-3/\alpha}} < +\infty \iff 4-\frac{3}{\alpha} > 1$

$\iff 3 > \frac{3}{\alpha} \iff \boxed{\alpha > 1}$

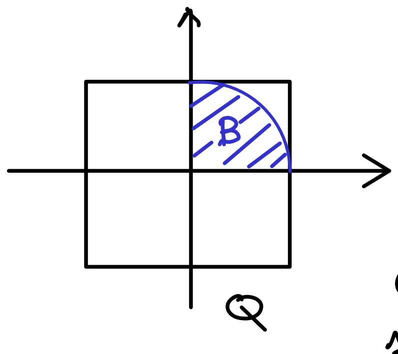
4. Si dica se esiste il seguente integrale improprio (9 p.)

$$\iint_Q \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy \quad \text{dove } Q=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, |x|\le 1, |y|\le 1\}.$$

Dato che l'integrando cambia segno, per l'integrabilità serve la contemporanea convergenza della parte positiva e della parte negativa. Se per es. $Q_1=[0,1]\times[0,1]$ e se $B=\{x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}\subset Q_1$, allora

$$\iint_{Q_1}\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy \geq \iint_B \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \frac{\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta}{\rho^4}\,\rho\,d\rho =$$

$$\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,\underbrace{\int_0^1\frac{d\rho}{\rho}}_{=+\infty} \Rightarrow$$ INTEGRALE NON CONVERGE



$B\subset Q$

la funzione è ≥ 0 su B

se $\iint_B f(x,y)\,dxdy=+\infty \Rightarrow f$ non è integrabile su Q