COGNOME:		
NOME:		
MATR.:		

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 24 febbraio 2017 (recupero) - PARTE A[1]

1. Scrivere l'enunciato del teorema del differenziale totale (2 p.)

Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ha derivate parziali in tutte le x di Ω aperto di $\mathbb{R}^N$,

se $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ sono continue in $x_0 \in \Omega$

ALLORA f è differenziabile in x_0

2. Si stabilisca se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{(x+y)xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

è differenziabile in $(0,0)$ (2p.)

Facciamo la derivata direzionale $f'(0,0)(v_x, v_y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+tv_x, 0+tv_y)}{t} =$

$\lim_{t \to 0} \frac{t(v_x+v_y)\, t^2 v_x v_y}{t \; t^2(v_x^2+v_y^2)} = \frac{(v_x+v_y)v_x v_y}{v_x^2+v_y^2}$ NON È LINEARE IN (v_x, v_y)

NON È DIFF. IN $(0,0)$

[1]PUNTEGGIO MINIMO Voto A≥ 4; Voto A+Voto B≥ 10 Tempo: 1/2 ora per la parte A, 1 ora per la parte B

3. Se $f(x,y) = xe^{x^2-y}$ si scriva il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato nel punto $(0,0)$ (il polinomio non la formula dello sviluppo!) (2 p.):

$$x e^{x^2} e^{-y} = x\left(1 + x^2 + o(x^2)\right)\left(1 - y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)\right) =$$

$$\left(x + x^3 + o(x^3)\right)\left(1 - y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)\right) =$$

$$x - xy + \frac{xy^2}{2} + o(xy^2) + x^3 + o(x^3 y) + o(x^3) =$$

tutti $o(\|x,y\|^3)$

$$x - xy + x^3 + \frac{xy^2}{2} + o(\|x,y\|^3)$$

DUNQUE $P_3(x,y) = x - xy + x^3 + \dfrac{xy^2}{2}$

4. Sia $g(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ xy^2 \end{pmatrix}$. Si dia per buono che g è invertibile.

(a) si provi che g^{-1} è differenziabile nel punto $(1,1)$ e si calcoli la matrice jacobiana di g^{-1} in tale punto (2p.);

Lo Jacobiano di g è $J_g(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix} \Rightarrow J_g(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Si ha che $J_g(1,1)$ ha determinante $4-1=3 \neq 0$ e $g(1,1) = (1,1)$

$\Rightarrow g^{-1}(1,1) = (1,1)$ e $J_{g^{-1}}(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$

(b) posto $f(\xi,\eta) := g^{-1}(2\xi - \eta, \xi + 3\eta - 10)$ si calcoli la matrice jacobiana di f nel punto $(2,3)$ (2p.):

posto $\phi(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} 2\xi - \eta \\ \xi + 3\eta - 10 \end{pmatrix}$ si ha $\Phi(2,3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $J_\phi(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

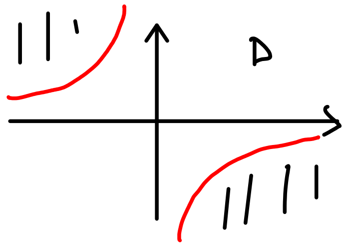
$\Rightarrow J_f(2,3) = J_{g^{-1}}(1,1) \cdot J_\phi(2,3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}}$

Ingegneria Aerospaziale, Compitino del 24 febbraio 2017 (recupero) - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x,y) := \ln(3+2xy)+x^2+y^2$.

(a) Si dica qual è il dominio di f (1p.)

$\mathrm{Dom} = \{3+2xy>0\}$



(b) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (6p.).

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y}{3+2xy} + 2x$ $\Rightarrow$ (pti critici) $\begin{cases} x = \frac{-y}{3+2xy} \\ y = \frac{-x}{3+2xy} \end{cases}$ $\Rightarrow x = \frac{x}{(3+2xy)^2} \Leftrightarrow$ $x=0$ / $(3+2xy)^2=1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x}{3+2xy} + 2y$

Noto che $(3+2xy)^2=1 \Leftrightarrow 3+2xy=1$

(−1 non va bene, si va fuori dal dominio)

DUNQUE o $x=0$ ($\Rightarrow y=0$) OPPURE $\begin{cases} y=-x \\ 3-2x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^2=1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ TRE PUNTI CRITICI $\boxed{(0,0) \quad \pm(1,-1)}$

Vediamo le derivate seconde.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-4y^2}{(3+2xy)^2} + 2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-4x^2}{(3+2xy)^2} + 2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2(3+2xy)-2y2x}{(3+2xy)^2} = \frac{6}{(3+2xy)^2}$

Allora

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2/3 \\ 2/3 & 2 \end{pmatrix}$ che ha determinante $4-\frac{4}{9}>0$ e $a_{11}=2>0$

DUNQUE $\boxed{(0,0) \text{ è pto di minimo}}$

$Hf(1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ che ha determinante $4-36<0$ $\Rightarrow$ $\boxed{(1,-1) \text{ è di sella}}$

e lo stesso $(-1,1)$

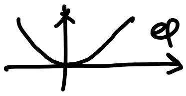
(c) Si consideri l'insieme $D := \{(x,y) : f(x,y)=0\}$. Si provi che D è un insieme regolare di codimensione 1. (3p.)

La tesi è vera per il Dini SE DIMOSTRO CHE nei punti $(x,y) \in D$ $\nabla f(x,y) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Infatti: punti in cui $\nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono i tre punti sopra: $(0,0)$ e $\pm(1,-1)$. Si ha $f(0,0) = \ln(3) \neq 0$ e $f(\pm1,\mp1) = \ln(0)+2 = 2 \neq 0$. Dunque nessuno di questi punti è in D $\Rightarrow$ D è regolare.

(d) Si mostri che D è simmetrico rispetto all'origine, che non interseca le retta $\{x = y\}$ e che i punti di D più vicini all'origine si trovano sulla retta $\{x + y = 0\}$(4p.)

È chiaro che se $f(x,y)=0 \Rightarrow f(y,x)=0$ da cui D è simmetrico.
Se restringo f sulla retta $x=y$ ottengo $\varphi(x) = \ln(3+2x^2)+2x^2$.

$\Rightarrow \varphi'(x) = \dfrac{4x^2}{3+2x^2} + 4x = 4x\left(\dfrac{2x^2+x+3}{3+2x^2}\right)$. $2x^2+x+3$ HA $\Delta<0$ $\Rightarrow$ NO RADICI

$\Rightarrow \varphi'(x)=0$ solo per $x=0$ $\Rightarrow$  e 0 è di minimo.

Dato che $\varphi(0)=\ln(3)>0 \Rightarrow (x,x) \notin D$ per ogni x

2. Sia $V := \{(x, y, z) : e^{xy} = x + z, e^{xz} + y = 0\}$

(a) Si verifichi che $P_0 := (0, -1, 1) \in V$ e si mostri che vicino a P_0 l'insieme V si descrive come grafico di una funzione $(x, y) = (f(z), g(z))$ con f e g definite in un intorno di $z = 1$ (3p.).

Poniamo $G(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{xy}-x-z \\ e^{xz}+y \end{pmatrix}$. Allora lo Jacobiano di G è

$$J = \begin{pmatrix} ye^{xy}-1, & xe^{xy}, & -1 \\ ze^{xz}, & 1, & xe^{xz} \end{pmatrix}.$$

Inoltre $G(0,-1,1) = \begin{pmatrix} e^0-0-1 \\ e^0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow P_0 \in V$

Calcolo J in P_0 $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

se prendo le prime due colonne $\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ HA DET. $-2 \neq 0$

Dunque posso esplicitare le prime due variabili (vicino a P_0)

(b) Si calcolino $f'(1)$ e $g'(1)$ (3p.)

chiamo $F(z) = \begin{pmatrix} f(z) \\ g(z) \end{pmatrix}$. Per il teorema del Dini

$$\frac{dF}{dz}(z) = -\left(\frac{\partial G}{\partial(x,y)}(F(z),z)\right)^{-1}\frac{\partial G}{\partial z}(F(z),z).$$

Mettendo $z=1$

$$\begin{pmatrix} f'(1) \\ g'(1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

cioè $f'(1) = -1/2 \quad g'(1) = 1/2$

(c) Si verifichi che V è un insieme regolare di codimensione 2 (3p.)

Se facciamo il determinante del minore corrispondente alle colonne 2 e 3 di J, cioè di $\begin{pmatrix} xe^{xy}, & -1 \\ 1, & xe^{xz} \end{pmatrix} \Rightarrow x^2 e^{xy} e^{xz} + 1 > 0$. Dunque è sempre possibile esplicitare $y = y(x)$ e $z = z(x) \Rightarrow V$ è regolare

(d) Si provi che non esiste il massimo di $g(x, y, z) := x$ su V (se ne deduce che V non è limitato) (3p.)

Usiamo i moltiplicatori per trovare i pti stazionari di g su V. Dato che $\nabla g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ la condizione diventa

$$\begin{cases} 1 = \lambda(xe^{xy} - 1) + \mu z e^{xy} \\ 0 = \lambda x e^{xy} + \mu \\ 0 = -\lambda + \mu x e^{xz} \\ e^{xy} - x - z = 0 \\ e^{xz} + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu x e^{xz} = -\lambda x^2 e^{xz} e^{xy}$$

$\Updownarrow$

$\lambda = 0$ oppure $\underbrace{1 = -x^2 e^{xz} e^{yz}}_{\text{IMPOSSIBILE}}$

DUNQUE $\lambda = 0$ da cui $\mu = 0$

TORNANDO AL SISTEMA

$$\begin{cases} 1 = 0 \quad \text{IMPOSSIBILE} \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

NE SEGUE CHE $g(x, y, z) = x$ NON HA PUNTI STAZIONARI VINCOLATI A V

IN PARTICOLARE x NON HA MASSIMO (NÉ MINIMO) SU V