COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 22 febbraio 2017 - PARTE A[1]

1. Siano $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto, $x_0 \in \Omega$ e $v \in \mathbb{R}^N$.
   Si scriva la definizione della derivata direzionale $f'(x_0)(v)$ (2p.).

$$f'(x_0)(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t v) - f(x_0)}{t} \quad \text{(se esiste)}$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 della funzione e^{xy} nel punto $(0,0)$ (3p.)

$$P_2(x,y) = \boxed{1 + xy}$$

Infatti $f(0,0) = 1$ $\quad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P_2(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} Hf(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$
$1 + xy$.

Si può anche arrivarci notando che $e^{xy} = 1 + xy + o(xy) = 1 + xy + o(\|x,y\|^2)$
dato che $xy = O(\|x,y\|^2)$

3. Si stabilisca se la funzione $f(x,y) := \dfrac{xy\sin(xy)}{x^2+y^2}$, $f(0,0) := 0$ è differenziabile in $(0,0)$ (3p.)

Si vede subito che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ (perché $f(0,y) = f(x,0) = 0$)
Dunque se esiste il differenziale, deve essere zero. Dunque (applicando la def.)

[1]PUNTEGGIO MINIMO VotoA$\geq$5p. Voto=VotoA+VotoB ($0 \leq$ Voto ≤ 40) - Lode se Voto≥ 35

f diff. in $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-df(0)(x,y)}{\|(x,y)-(0,0)\|}=0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\sin(xy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0$

Dato che $\displaystyle\left|\frac{xy\sin(xy)}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right| \le \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \le \frac{(x^2/2+y^2/2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{4}(x^2+y^2)^{1/2} \to 0$

LA TESI È VERA $\Rightarrow$ f è diff. in $(0,0)$ (e $df(0,0)=0$)

4. Si mostri che l'insieme $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x+y>0, 2xy = \ln(x+y)\}$ è regolare (vicino a ogni suo punto è descritto da una curva regolare) (3p.) .

Poniamo $G(x,y) = 2xy - \ln(x+y)$ definita in $\Omega = \{x+y>0\}$.
Allora $M = \{(x,y)\in\Omega : G(x,y)=0\}$. Si ha
$\displaystyle\frac{\partial G}{\partial x} = 2y - \frac{1}{x+y}$ $\displaystyle\frac{\partial G}{\partial y} = 2x - \frac{1}{x+y}$. Un punto (x,y) annulla ∇G
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = \frac{1}{x+y} \\ 2x = \frac{1}{x+y}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x = \frac{1}{2x}\end{cases} \Leftrightarrow x=y=\pm 1/2$. Ma $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) \notin \Omega$!!
si ha $G(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \neq 0$. DUNQUE IN M NON CI SONO PUNTI IN CUI $\nabla G = 0$. LA TESI SEGUE DAL TEOREMA DEL DINI

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Un campo $\vec{f}$ si dice *solenoidale* se $\vec{f}$:
$\boxed{\text{ha gradiente nullo}}$, $\boxed{\text{ha rotore nullo}}$, $\boxed{\text{ha divergenza nulla}}$ X, $\boxed{\text{ammette potenziale}}$, $\boxed{\text{n. d. p.}}$

(b) Se $f:\Omega\to\mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2 su un aperto Ω di $\mathbb{R}^3$, allora la matrice hessiana di f, calcolata in un punto $x\in\Omega$, ha tutti autovalori reali $\boxed{\text{VERO}}$ X $\boxed{\text{FALSO}}$.

(c) La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge uniformemente in $]-1,1[$ $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$ X.

(d) Se $\gamma:[0,L]\to\mathbb{R}^N$ è una curva parametrizzata in lunghezza d'arco, allora γ' è costante in $[0,L]$ $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$ X.

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 22 febbraio 2017 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) := 5 \arctan(x^2 + y^2) - 4\ln(1 + xy)$.

   (a) Si trovino il dominio D di f, tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (4p.).

$D = \{1+xy>0\}$. Si ha $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{10x}{1+(x^2+y^2)^2} - \frac{4y}{1+xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{10y}{1+(x^2+y^2)^2} - \frac{4x}{1+xy}$

PTI STAZ. $\Rightarrow \begin{cases} \frac{10x}{1+(x^2+y^2)^2} = \frac{4y}{1+xy} \\ \frac{10y}{1+(x^2+y^2)^2} = \frac{4x}{1+xy} \end{cases}$ MOLTIPLICO LA I^a RIGA PER x LA II^a PER y E FACCIO LA DIFFERENZA $\Rightarrow \frac{10x^2}{1+(x^2+y^2)^2} = \frac{10y^2}{1+(x^2+y^2)} \Leftrightarrow x^2 = y^2$

SE $x = y$ TROVO $\frac{10x}{1+4x^4} = \frac{4x}{1+x^2} \Leftrightarrow$ $x=0$ oppure $10+10x^2 = 4+16x^4$ $\Leftrightarrow$ $x=0$ oppure $16x^4-10x^2+6=0$ $\Leftrightarrow$ $x=0$ oppure $x^2 = \frac{5 \pm\sqrt{121}}{16} = \begin{cases} 1 \\ -3/8 \leftarrow \text{NO} \end{cases}$

SE $x=-y$ TROVO $\frac{10x}{1+4x^4} = -\frac{4x}{1+x^2}$ semplifico $x=0$ GIA' VISTA $\Leftrightarrow 16x^4 + 10x^2+14=0$ NON HA RADICI REALI $\Delta = 100 - 14 \cdot 64 < 0$

DUNQUE HO $(0,0) \pm (1,1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{10(1+(x^2+y^2)^2) - 40x^2(x^2+y^2)}{(1+(x^2+y^2)^2)^2} + \frac{4y^2}{(1+xy)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{10(1+(x^2+y^2)^2) - 40y^2(x^2+y^2)}{(1+(x^2+y^2)^2)^2} + \frac{4x^2}{(1+xy)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{40xy(x^2+y^2)}{(1+(x^2+y^2)^2)^2} - \frac{4}{(1+xy)^2}$$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$ determinante $= 100 - 16 > 0$, $a_{11} = 10 > 0$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ pto di minimo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = \frac{10 \cdot 5 - 40 \cdot 2}{25} + \frac{4}{4} = -\frac{30}{25} + 1 = -\frac{1}{5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = \frac{40 \cdot 2}{25} - \frac{4}{4} = \frac{11}{5}$$

$Hf(1,1) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}$ ha determinante $< 0 \Rightarrow$ $\pm(1,1)$ sono pti di sella

   (b) Si consideri l'insieme $M := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Si dimostri che $M \subset D$ (cioè che $1 + xy > 0$ se $x^2 + y^2 \leq 1$). Si trovino poi il massimo e il minimo di f su M (2p.).

Cerchiamo il minimo di $g(x) = 1+xy$ su M. Si ha $\frac{\partial g}{\partial x} = y$ $\frac{\partial g}{\partial x} = x$

Dunque $(0,0)$ l'unico punto stazionario libero. Cerchiamo i pti stazionari vincolati a $\partial M = \{x^2+y^2=1\}$. Questo significa trovare le soluzioni di $\nabla g = \lambda \binom{2x}{2y} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda x + y = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow$ la matrice $\begin{pmatrix} -2\lambda & 1 \\ 1 & -2\lambda \end{pmatrix}$ ha determinante zero $\Leftrightarrow 4\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1/2$

$\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$; $\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1)$

Si ha $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. DUNQUE $\min_D g = \frac{1}{2} > 0$

MENTRE $g(0,0) = 1$

$\Rightarrow M \subset D$!!

Cerchiamo i punti di minimo e di massimo per f in M. Questi punti o sono stazionari (e quindi sono $(0,0)$, $\pm(1,1)$) oppure sono in $\partial M = \{x^2+y^2=1\}$

Tra i punti stazionari può andare bene $(0,0)$ come punto di minimo ($\pm(1,1)$ SONO SELLE) e $f(0,0)=0$. Se consideriamo (x,y) su M si ha

$f(x,y) = 5\arctan(1) - \ln(1+xy)$. Dunque il max/min di f su M corrisponde al min/max di $1+xy$ su M (perché $-\ln$ è decrescente)

$$\Rightarrow \min_{\partial M} f = f\left(\tfrac{\sqrt2}{2}, \tfrac{\sqrt2}{2}\right) = 5\arctan(1) - \ln\left(\tfrac32\right) = \frac{5\pi}{4} + \ln(2) - \ln(3)$$

$$\max_{\partial M} f = f\left(\tfrac{\sqrt2}{2}, -\tfrac{\sqrt2}{2}\right) = 5\arctan(1) - \ln\left(\tfrac12\right) = \boxed{\frac{5\pi}{4} + \ln(2) = \max_M f}$$

Dato che $\frac{5\pi}{4} - \ln\frac32 > 0 \left(\frac{5\pi}{4} > 1 = \ln(e) > \ln\left(\frac32\right)\right) \Rightarrow \boxed{\min_M f = f(0) = 0}$

2. Si consideri l'insieme

$$S := \left\{(x, y, x) \,:\, x^2 + y^2 = z^2 + 9, 0 \le z \le 4\right\}.$$

(a) Si mostri che esiste una parametrizzazione Γ che rende S una superficie regolare con normale concorde con il versore $\vec{\mathbf{k}}$. (1p.)

Si può vedere S come grafico di $g: A \to \mathbb{R}$ dove $A = \{9 \le x^2+y^2 \le 25\}$ e $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9}$. Dato che g è C^1 S è regolare.

Ricordiamo che la parametrizzazione Γ si ottiene ponendo $\Gamma(u,v) = u\vec\imath + v\vec\jmath + g(u,v)\vec k$

$$\Rightarrow \frac{\partial\Gamma}{\partial u} = \vec\imath + \frac{\partial g}{\partial u}\vec k, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial v} = \vec\jmath + \frac{\partial g}{\partial v}\vec k \quad \text{e la normale } \vec n(u,v) = -\frac{\partial g}{\partial u}\vec\imath - \frac{\partial g}{\partial v}\vec\jmath + \vec k$$

$$= -\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2-9}}\vec\imath - \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2-9}}\vec\jmath + \vec k$$

CHE DUNQUE È CONCORDE CON $\vec k$.

(b) Si consideri il campo $\vec{f}(x, y, z) := e^z((x + y)\vec{\mathbf{i}} - (x - y)\vec{\mathbf{j}} - 2\vec{\mathbf{k}})$. Si dica se $\vec{f}$ ammette un potenziale vettore $\vec{F}$ e in tal caso si calcoli un possibile $\vec{F}$ (2p).

NOTIAMO CHE $\operatorname{div}(\vec f) = e^z + e^z - 2e^z = 0 \Rightarrow \vec f$ ammette potenziale vettore

Per trovarlo cerchiamo $\vec F$ del tipo $F_1\vec\imath + F_2\vec\jmath$ (senza componente F_3).

$$\Rightarrow \operatorname{rot}(F_1\vec\imath + F_2\vec\jmath) = -\frac{\partial F_2}{\partial z}\vec\imath + \frac{\partial F_1}{\partial z}\vec\jmath + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec k \Rightarrow$$

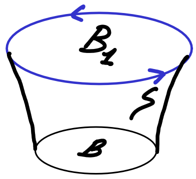
$$F_2 = -\int e^z(x+y)\,dz = -e^z(x+y) + c(x,y) \qquad F_1 = \int e^z(y-x)\,dz = e^z(y-x) + d(x,y)$$

INFINE $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -e^z + \frac{\partial}{\partial x}c(x,y) - e^z - \frac{\partial}{\partial y}d(x,y)$ che è $= -2e^z$

se si prende $c = d = 0$. Dunque un (possibile) potenziale vettore è dato da

$$\boxed{\vec F(x,y,z) = e^z\left((y-x)\vec\imath - (x+y)\vec\jmath\right)}$$

(c) Si consideri $S_1 := S \cup B$, dove $B := \{x^2 + y^2 \le 9, z = 0\}$ e si consideri S_1 come una superficie regolare a tratti con normale concorde con $\vec{\mathbf{k}}$.
Si calcolino il flusso di $\vec{f}$ attraverso S_1 e attraverso S. (4p.).



MODO SUGGERITO DA QUANTO PRECEDE

Si vede che il bordo di S_1 è la circonferenza $\{x^2+y^2=25, z=4\}$ parametrizzata da $\gamma(t) = 5\cos(t)\vec{i} + 5\sin(t)\vec{j} + 4\vec{k}$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$ (il verso è coerente con la normale concorde con $\vec{k}$).

Applicando Stokes $\Rightarrow$ $\iint_{S_1} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iint_{S_1} \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{\nu}\,ds = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} =$

$$\int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} e^4 5(\sin t - \cos t)\vec{i} - (\cos t + \sin t)\vec{j}) \cdot (-5\sin t\,\vec{i} + 5\cos t\,\vec{j})\,dt$$

$$= 25 e^4 \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + \sin t\cos t - \cos^2 t - \sin t\cos t)\,dt = 5e^4 \int_0^{2\pi} (-1)\,dt = -50\pi e^4$$

MODO PIÙ SEMPLICE

Dato che γ è anche il bordo di $B_1 = \{x^2+y^2 \le 25, z=4\}$ possiamo scrivere

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_{B_1} \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iint_{B_1} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iint_{B_1} f_3(x,y,z)\,d\sigma =$$

$$\iint_B -2e^4\,dx\,dy = -2e^4\cdot\pi(5)^2 = -50\pi e^4.$$

Si può anche evitare di nominare Stokes e $\vec{F}$ dato che, essendo $\operatorname{div}\vec{f} = 0$ e ponendo $\Omega = \{x^2+y^2 \le z^2+9,\ 0 \le z \le 4\}$ si ha $\partial\Omega = (-S_1)\cup B$ ($-S_1$ è S_1 con la normale discorde da $\vec{k}$) $\Rightarrow$ (usando il t. della divergenza)

$$0 = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz = \iint_{B_1} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma - \iint_{S_1} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma \Rightarrow \iint_{S_1} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iint_{B_1} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma$$

(e si continua come sopra).

Si può calcolare il flusso di $\vec{f}$ su B come fatto per B_1:

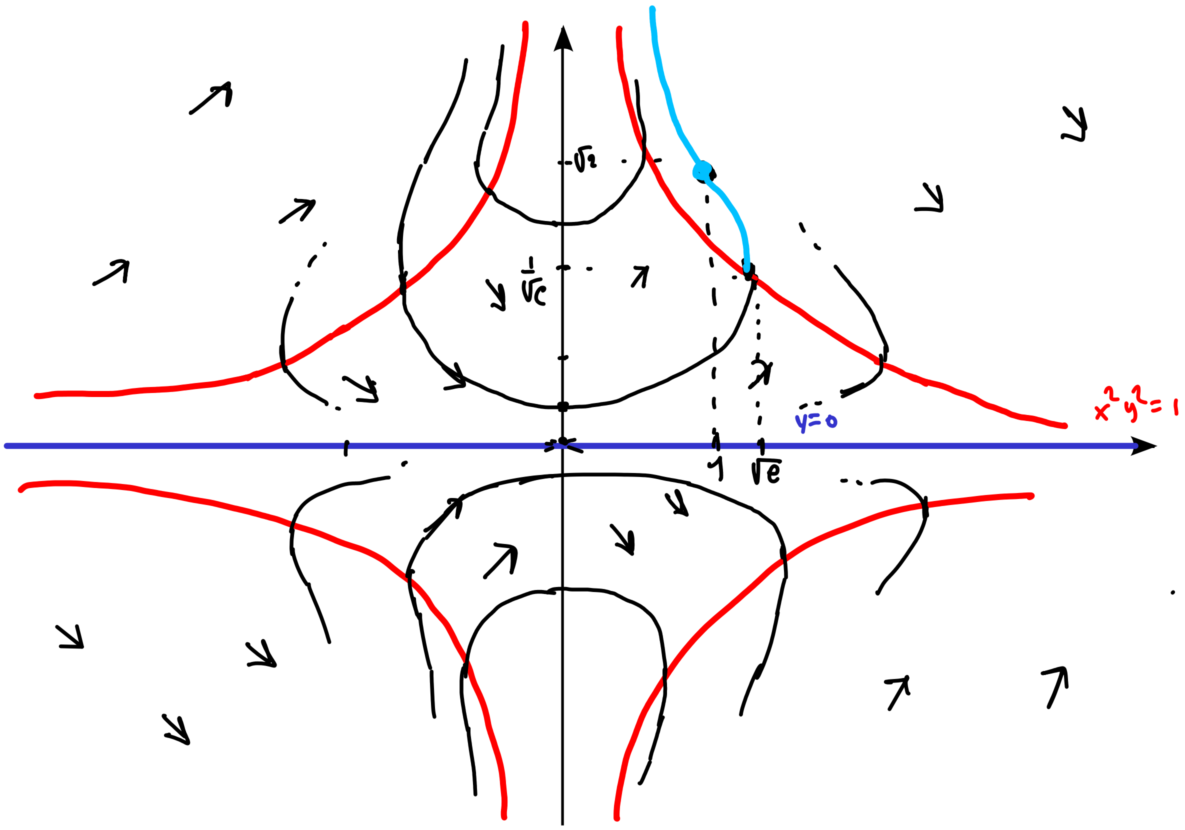
$$\iint_B \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iint_B (-2e^0)\,dx\,dy = -2\pi(3)^2 = -18\pi.$$

Per differenza: $\iint_S \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iint_{S_1} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma - \iint_B \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \boxed{-\pi(50e^4 - 18)}$

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{xy^3}{1 - x^2y^2} \qquad (=: F(x,y))$$

(a) Si trovi il dominio della funzione $F(x,y)$ e le zone del piano xy in cui F è positiva/negativa/nulla, riportandole nel diagramma sottostante (1p.).



(b) Si trovi un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x,y) = \lambda(xy)$. Si trovi poi un integrale primo (4p.). Deve essere

$$\frac{\partial}{\partial y}\lambda(xy)\,xy^3 = \frac{\partial}{\partial x}\lambda(xy)(x^2y^2-1) \iff$$

$$x\lambda'(xy)xy^3 + \lambda(xy)3xy^2 = y\lambda'(xy)(x^2y^2-1) + \lambda(xy)(2xy^2) \iff$$

$$\lambda'(xy)(xy^3 - xy^3 + y) = \lambda(xy)(2xy^2 - 3xy^2 \iff y\lambda'(xy) = -xy^2\lambda(xy) \iff$$

$$\lambda'(xy) = -xy\lambda(xy) \iff \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} = -t \iff \ln(\lambda) = -\frac{t^2}{2} + c \iff \lambda(t) = c\,e^{-t^2/2}$$

POSSO PRENDERE $\boxed{\lambda(xy) = e^{-\frac{x^2y^2}{2}}}$. Cerchiamo un int. primo $\phi(x,y)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \int y^3 x\, e^{-\frac{x^2y^2}{2}}\,dx = y\,e^{-\frac{x^2y^2}{2}} + c(y)$$. Deriviamo in y

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y\,e^{-\frac{x^2y^2}{2}} + c(y)\right) = e^{-\frac{x^2y^2}{2}} - y\,x^2y\,e^{-\frac{x^2y^2}{2}} + c'(y) = (1-x^2y^2)\,e^{-\frac{x^2y^2}{2}} + c'(y)$$

IMPONENDO CHE FACCIA $(1-x^2y^2)\,e^{-\frac{x^2y^2}{2}} \Rightarrow c' = 0 \Rightarrow c = \text{costante}$

DUNQUE $\boxed{\phi(x,y) = y\,e^{-\frac{x^2y^2}{2}} + \text{costante}}$

(c) Si trovi la soluzione con condizione iniziale $y(\sqrt{2}) = 1$ disegnandone il grafico sul diagramma precedente e in particolare si dica qual è il suo intervallo massimale di esistenza $]a, b[$ (2p.).

Dato che $\phi(x,y)$ è costante nelle traiettorie, se y è la sol. che parte da $(\sqrt{2},1)$ $\Rightarrow$ $\phi(x,y) = \phi(\sqrt{2},1) \iff y\, e^{-\frac{x^2y^2}{2}} = e^{-1}$

Si vede che $(\sqrt{2},1)$ è "sopra la linea rossa" perché $(\sqrt{2})^2(1)^2 = 2 > 1$. Dunque $y(x)$ è decrescente ed esiste in un intervallo $]\underline{x},\bar{x}[$ con $0 \le \underline{x} < \sqrt{2} < \bar{x} \le +\infty$, $x^2 y(x)^2 > 1$ in $]\underline{x},\bar{x}[$, $y(x) \to \underline{y}$ per $x \to \underline{x}$, $y(x) \to \bar{y}$ per $x \to \bar{x}$ con $0 \le \bar{y} < \underline{y} \le +\infty$. Inoltre se $\underline{y}$ o $\bar{y}$ sono finiti $\Rightarrow$ $(\underline{x},\underline{y})$ o $(\bar{x},\bar{y})$ sta sulla curva rossa $x^2y^2 = 1$. Si capisce allora che $\underline{y} = +\infty$ perché se no $y(x)$ dovrebbe uscire dalla curva rossa con derivata $-\infty$, che è impossibile. Dico che $\underline{x} = 0$

Se fosse $\underline{x} > 0$ avrei $e^{-1} = \lim_{x \to \underline{x}} y(x)\, e^{-\frac{x^2 y(x)^2}{2}} = \lim_{\substack{x \to \underline{x} \\ y \to +\infty}} y\, e^{-\frac{x^2y^2}{2}} = 0$ IMPOSSIBILE

VICEVERSA DICO CHE $\bar{x} < +\infty$. Se no avrei $e^{-1} = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to \bar{y}}} y\, e^{-\frac{x^2}{2}y^2} = 0$ (sia se $\bar{y} = 0$ sia se $\bar{y} > 0$)

Allora $(\bar{x},\bar{y})$ deve verificare $\begin{cases} x^2y^2 = 1 \\ y\, e^{-\frac{x^2y^2}{2}} = e^{-1} \end{cases} \Rightarrow \bar{y} = e^{-1/2}$, $\bar{x} = e^{1/2}$

In definitiva $y :]0, \sqrt{e}[\to \mathbb{R}$, è decrescente, $y(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$, $y(x) \to \frac{1}{\sqrt{e}}$ per $x \to \sqrt{e}$

4. Si consideri l'equazione differenziale:

$$x^2y'' - 3y' - 6y = 6$$

Si cerchino le soluzioni della forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (serie di potenze centrata in zero). In particolare:

(a) si trovi una relazione ricorsiva sui coefficienti a_n (2p.):

Se $y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1} = \sum_0^\infty (n+1) a_{n+1} x^n$

$y'' = \sum_2^\infty n(n-1) a_n x^{n-2} \Rightarrow x^2 y'' = \sum_2^\infty n(n-1) a_n x^n = \sum_0^\infty n(n-1) a_n x^n \Rightarrow$

$x^2 y'' - 2y' - 6y = \sum_0^\infty \left[(n(n-1) - 6) a_n - 4(n+1) a_{n+1} \right] x^n = \sum_0^\infty \left[(n^2 - n - 6) a_n - 3(n+1) a_{n+1} \right] x^n$

IMPONENDO CHE VALGA L'EQ. (nota che $6 = \sum_0^\infty b_n x^n$ con $b_0 = 6$ $b_n = 0$ $n \ge 1$)

$(n^2 - n - 6) a_n - 3(n+1) a_{n+1} = \begin{cases} 6 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \ge 1 \end{cases}$. CIOÈ

$(R)\begin{cases} a_1 = \dfrac{-6a_0 - 6}{3} = -2(a_0 + 1) \\ a_{n+1} = \dfrac{(n^2 - n - 6) a_n}{3(n+1)} \quad \text{se } n \ge 1 \end{cases}$ a_0 è assegnabile ad arbitrio.

(b) si mostri che tutte le soluzioni (di questo tipo) sono polinomi di terzo grado (1p.)

Si vede che per $n = 3$ la (R) dà $a_4 = \frac{3^2-3-6}{3\cdot 4} a_3 = 0$

e allora, sempre usando (R), $a_n = 0 \ \forall n \geq 0$. In effetti

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 &= -2(a_0+1) \\ a_2 &= 2(a_0+1) \\ a_3 &= -\frac{8}{9}(a_0+1) \\ a_n &= 0 \quad \text{se } n \geq 4 \end{aligned}}$$

$a_2 = \frac{1^2-1-6}{3\cdot 2} a_1 = -a_1 = 2(a_0+1)$

$a_3 = \frac{2^2-2-6}{3\cdot 3} a_2 = -\frac{4}{9} a_2 = -\frac{8}{9}(a_0+1)$

(c) si trovino tutte le soluzioni con $y(0) = 8$ (1p.)

Da quanto sopra $a_0 = 8$, $a_1 = -18$, $a_2 = 18$, $a_3 = -8$ cioè

$$\boxed{y(x) = -8x^3 + 18x^2 - 18x + 8}$$

Verifica: $y(0) = 8$. $y'(x) = -24x^2 + 36x - 18$ $y''(x) = -48x + 36$

$x^2 y'' - 3y' - 6y = -\cancel{48x^3} + \cancel{36x^2} + \cancel{72x^2} - \cancel{108x} + 54 + \cancel{48x^3} - \cancel{108x^2} + \cancel{108x} - 48$
$= 6$

(d) si dica per quali $a \in \mathbb{R}$ esiste una soluzione con $y(0) = a$, $y'(0) = 4$ (1p.)

Deve essere $a = y(0) = a_0$, $4 = y'(0) = a_1 = -2(a_0+1) = -2(a+1)$

$\Leftrightarrow \ -2a - 2 = 4 \ \Leftrightarrow \ \boxed{a = -3}$