COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 16 gennaio 2017 - PARTE A[1]

1. Si dica (giustificando) se la funzione definita da $f(x,y) := \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ per $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$ è

- continua in $(0,0)$ (2p.),

$|f(x,y)| \le |y| \dfrac{(x^2+y^2)}{2} \dfrac{1}{x^2+y^2} = \dfrac{|y|}{2} \to 0$ se $(x,y) \to (0,0)$

Dunque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ f è continua

- differenziabile in $(0,0)$ (2p.),

Facciamo la derivata direzionale $f'(0)(v)$ con $v = (v_x, v_y)$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_x, tv_y) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 v_x v_y^2}{t\, t^2 (v_x^2 + v_y^2)} = \frac{v_x v_y^2}{v_x^2 + v_y^2}$$

questa espressione non è lineare rispetto a (v_x, v_y) $\Rightarrow$ f NON È DIFFERENZIABILE in (0,0)

2. Si scriva la definizione di convergenza totale per una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, dove $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ (2p.).

La serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge totalmente su $[a,b]$ se $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ converge, dove $\|f_n\|_\infty = \sup_{a \le x \le b} |f_n(x)|$

3. Si stabilisca se il campo $\vec{f}(x,y) = e^{x^2 y}(2xy\vec{\mathbf{i}} + x^2\vec{\mathbf{j}})$ è conservativo (2p.).

[1] PUNTEGGIO MINIMO VotoA$\geq$5p. Voto=VotoA+VotoB ($0 \leq$ Voto ≤ 40) - Lode se Voto≥ 35

$\vec f$ è irrotazionale: $\frac{\partial}{\partial y} 2e^{x^2y}xy = 2x\, e^{x^2y} + 2x^3 y\, e^{x^2y} = 2x(1+x^2y)\, e^{x^2y}$

$\frac{\partial}{\partial x} x^2 e^{x^2y} = 2x\, e^{x^2y} + 2x^3y\, e^{x^2y} = 2x\,(1+x^2y)\, e^{x^2y}$. Dato che $\vec f$ è definito su tutto $\mathbb{R}^2$ che è convesso ($\Rightarrow$ semplicemente connesso) $\vec f$ è conservativo.

Si poteva anche cercare un potenziale F per $\vec f$:

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy\, e^{x^2y} \iff F = \int 2xy\, e^{x^2y}\, dx = e^{x^2y} + c(y)$. Se derivo in y

$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2y} + c(y)\right) = x^2 e^{x^2y} + c'(y)$ vedo che $\nabla e^{x^2y} = \vec f$ (prendo $c=0$)

DUNQUE $\exists\, F$ potenziale $\iff \vec f$ è conservativo.

4. Si trovino gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui l'integrale improprio $\iiint_{\{x^2+y^2+z^2 \geq 1\}} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$ è convergente (3p.)

Passando in coordinate sferiche l'integrale diventa

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin(\varphi)\, d\varphi \int_1^{+\infty} \frac{\rho^2}{\rho^{2\alpha}}\, d\rho = 2\pi \int_0^{\pi} \sin(\varphi)\, d\varphi \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-2}};$$

l'integrale in ρ converge se e solo se $2\alpha - 2 > 1 \iff 2\alpha > 3 \iff \boxed{\alpha > \frac{3}{2}}$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Se f è una funzione definita in un intorno U di $x_0 \in \mathbb{R}^N$, se $\nabla f(x_0) = 0$ e $H_f(x)$ è semidefinito negativo per $x \in U$, allora:

[x_0 è punto di minimo], [~~x_0 è punto di massimo~~], [x_0 è punto di sella], [non si può dire nulla].

(b) Se f è una funzione periodica di classe $\mathcal{C}^2$, allora la sua serie di Fourier converge uniformemente [~~VERO~~] [FALSO].

(c) Se $\vec f$ è un campo irrotazionale in un aperto connesso Ω di $\mathbb{R}^N$, allora $\oint_\gamma \vec f \cdot d\vec s = 0$ per ogni curva chiusa γ in Ω [VERO] [~~FALSO~~].

(d) La funzione definita come somma della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+n^2}$ è derivabile in ogni x con $-1 < x < 1$.

[~~VERO~~] [FALSO].

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x,y) := e^{x^2+4y^2-32} + 4xy$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (3p.).

$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2x e^{x^2+4y^2-32} + 4y$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 8y e^{x^2+4y^2-32} + 4x$ quindi $\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -x e^{x^2+4y^2-32} \\ x = -2y e^{x^2+4y^2-32} \end{cases}$ $(*)$

Da $(*)$ segue (metto $2y = \dots$ nella II^a riga) $x = x(e^{x^2+4y^2-32})^2 \Leftrightarrow$ $x=0$ $\vee$ $(e^{x^2+4y^2-32})^2 = 1$

Da $x=0$ in $(*)$ segue $y=0$. La condizione $(e^{x^2+4y^2-32})^2=1$ equivale a $e^{x^2+4y^2-32}=1$ (perché l'esponenziale è >0) che equivale a $x^2+4y^2=32$. Dunque se escludo $(0,0)$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -x \\ x^2+4y^2=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y \\ 8y^2=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp 4 \\ y = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow$ TRE PTI STAZIONARI $\boxed{(0,0) \quad \pm(4,-2)}$ e

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x^2+4y^2-32}(2+4x^2)$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x^2+4y^2-32}(8+64y^2)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 16xy\, e^{x^2+4y^2-32} + 4$. Allora

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2e^{-32} & 4 \\ 4 & 8e^{-32} \end{pmatrix} \Rightarrow \det = 16e^{-16} - 16 < 0$ $\quad$ $(0,0)$ è una sella

$H_f(4,-2) = \begin{pmatrix} 2+64 & -128+4 \\ -128+4 & 8+256 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & -124 \\ -124 & 264 \end{pmatrix}$ $\quad \det = 66 \times 264 - 124^2 > 0$

$a_{11} = 66 > 0$

$\Rightarrow$ $(4,-2)$ è un pto di minimo (lo stesso per $(-4,2)$)

   (b) Si dica se f ha minimo e in caso affermativo si trovi $\min_{\mathbb{R}^2} f$ (1p.)

Dato che $4xy = 2x \cdot 2y \le 2\left(\frac{x^2+(2y)^2}{2}\right) = x^2+4y^2$ si ha

$f(x,y) \ge e^{x^2+4y^2} - x^2+4y^2$. Dato che $g(t) = e^t - t \to +\infty$ per $t \to +\infty$

si ha $\boxed{\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = +\infty}$ da cui f HA MINIMO. Dato che

il punto di minimo è stazionario e dato che $(0,0)$ è di sella $\Rightarrow$

$\min_{\mathbb{R}} f = f(4,-2) = f(-4,2) = 1 - 32 = -31$

(c) Si trovino il massimo e il minimo di f sull'insieme $D := \{x^2 + 4y^2 \le 4\}$ (3p.).

Dato che D è chiuso e limitato $\Rightarrow$ $\max_D f$ / $\min_D f$ esistono. Se i pti di max/min sono interni a D $\Rightarrow$ devono essere stazionari. Ma l'unico pto stazionario interno è $(0,0)$ che è di sella. Dunque i pti di max/min di f su D si trovano su $\partial D = \{x^2+4y^2=4\}$. Posso parametrizzare ∂D mediante $\gamma(t) = \left(\frac{\cos(t)}{2}, \sin(t)\right)$ $0 \le t \le 2\pi$ e studiare $h(t) = f(\gamma(t)) = e^{-28} + 2\cos(t)\sin(t)$ $= e^{-28} + \sin 2t$. È chiaro che il minimo/massimo si ha per $2t = \frac{3}{2}\pi / 2t = \pi$ che corrisponde a $\boxed{\min_D f = e^{-28} - 1 \quad , \max_D f = e^{-28} + 1}$

Si può anche fare con i moltiplicatori, usando $G(x,y) = x^2+4y^2-4$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 2x\, e^{x^2+4y^2-32} + 4y = 2\lambda x \\ 8y\, e^{x^2+4y^2-32} + 4x = 8\lambda y \\ x^2+4y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = \underbrace{(\lambda - e^{-28})}_{\tilde\lambda} x \\ x = 2(\lambda - e^{-28}) y \\ x^2+4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy = \tilde\lambda x^2 \\ 2xy = \tilde\lambda 4y^2 \\ x^2+4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad 4xy = \tilde\lambda(x^2+4y^2) \Downarrow \boxed{\tilde\lambda = xy}$$

DUNQUE $\begin{cases} 2xy = x^3y \\ 2xy = 4xy^3 \\ x^2+4y^2 = 4 \end{cases}$ DA CUI $\begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = 1/2 \\ \lambda = e^{-2} \pm 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $f(x,y) = e^{-28} \pm 1$ UNO MIN / UNO MAX

$x = 0 \Leftrightarrow y = 0$ IMPOSSIBILE

2. Si consideri l'insieme S descritto dalla parametrizzazione $\Gamma(\theta, t) := \sqrt{1+t^2}(\cos(\theta)\vec{\mathbf{i}} + \sin(\theta)\vec{\mathbf{j}}) + t\vec{\mathbf{k}}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $|t| \le 1$.

(a) Si verifichi che S è una superficie (2p.)

Si ha $\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} = \sqrt{1+t^2}(-\sin(\theta)\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$ $\quad \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}(\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}) + \vec{k}$ $\Rightarrow$

$\vec{N}(\theta,t) = \frac{\partial\Gamma}{\partial\theta} \otimes \frac{\partial\Gamma}{\partial t} = \sqrt{1+t^2}\,\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) \otimes (\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}) +$ $\sqrt{1+t^2}(-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}) \otimes \vec{k} = -t\vec{k} + \sqrt{1+t^2}(\vec{j}\sin(\theta) + \vec{i}\cos(\theta))$

$\begin{pmatrix} i \otimes j = k \\ j \otimes k = i \\ k \otimes i = j \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \|\vec{N}(\theta,t)\|^2 = t^2 + (1+t^2)\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 + 2t^2 \ne 0$

QUINDI $\left\|\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta} \otimes \frac{\partial\Gamma}{\partial t}\right\| = \sqrt{1+2t^2} \ne 0$ per cui S è una superficie

(b) Si calcoli l'area di S (2p.).

$\text{Area}(S) = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \left\|\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta} \otimes \frac{\partial\Gamma}{\partial t}\right\| d\theta\, dt = 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+2t^2}\,dt = 2\pi\int_{-1}^{1}\frac{1+2t^2}{\sqrt{1+2t^2}}\,dt =$

$2\pi \left.\frac{\operatorname{arcsinh}(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}\right|_{-1}^{1} + 2\pi\int_{-1}^{1} 2t\,\frac{t}{\sqrt{1+2t^2}}\,dt = 2\sqrt{2}\pi \arcsin\sqrt{2} + 2\pi\underbrace{\left[t\sqrt{1+2t^2}\right]_{-1}^{1}}_{=2\sqrt{3}}$

$-2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+2t^2}\,dt \Rightarrow 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1+2t^2} = \boxed{\sqrt{2}\pi\arcsin\sqrt{2} + 2\pi\sqrt{3}}$

(c) Si calcoli il flusso del campo $\vec{f}(x,y,z) := e^{x^2+y^2}\left(\frac{y\vec{\mathbf{i}}-x\vec{\mathbf{j}}}{x^2+y^2}+\vec{\mathbf{k}}\right)$ attraverso S (dove la normale è determinata dalla parametrizzazione) (2p.).

$$\iint_S \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \vec{f}(r(\theta,t))\cdot\vec{N}(\theta,t)\, d\theta\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{1+t^2}\left(\frac{\sqrt{1+t^2}\,(\sin\theta\,\vec{i}-\cos\theta\,\vec{j})}{1+t^2}+\vec{k}\right)\cdot\left(\sqrt{1+t^2}\,(\vec{i}\cos(\theta)+\vec{j}\sin(\theta))-t\,\vec{k}\right)d\theta\, dt =$$

ORTOGONALI

$$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} -t\,e^{1+t^2}\, dt\, d\theta =$$

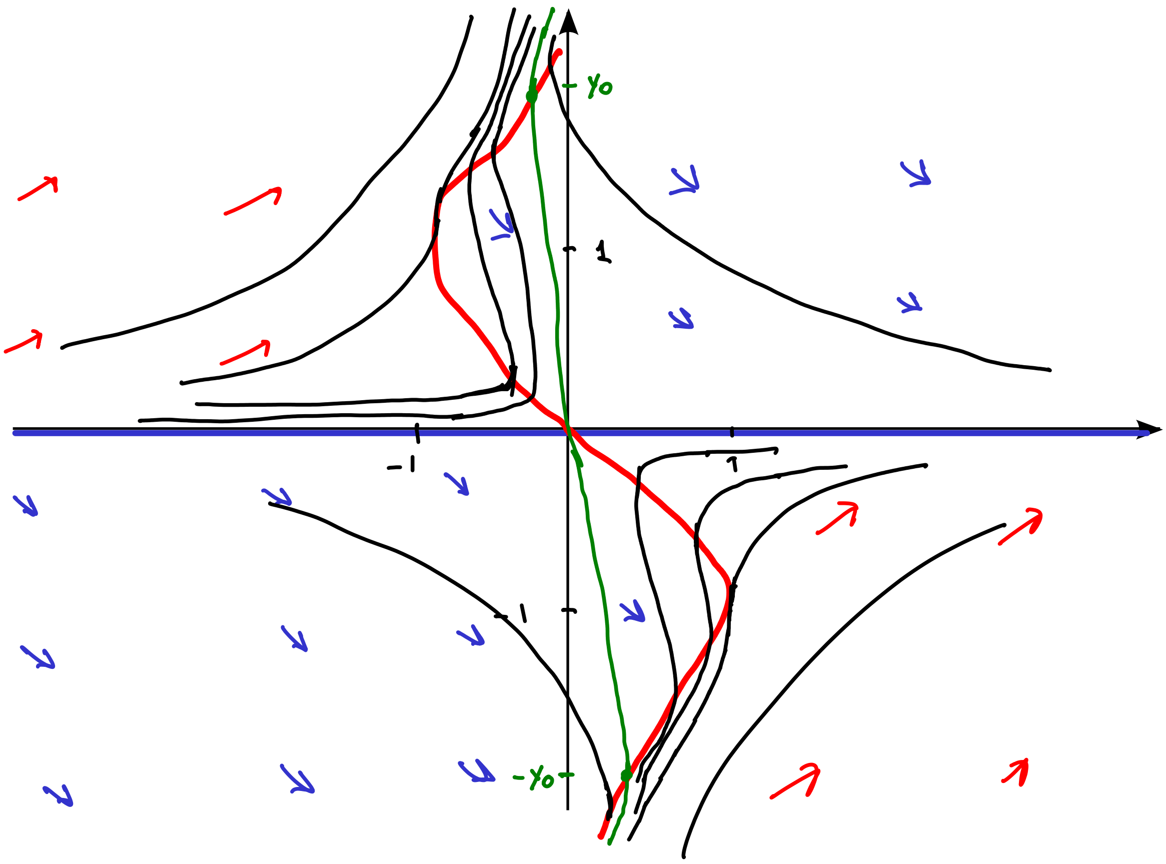
$$-2\pi e\int_{-1}^{1} t\,e^{t^2}\, dt = -\pi e\int_1^1 e^s\, ds = \boxed{0}$$

$(s=t^2,\ ds=2t\,dt)$

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{y(1+y^2)}{x(1+y^2)+2y} \qquad (=: F(x,y))$$

(a) Si trovi il dominio della funzione $F(x,y)$ e le zone del piano xy in cui F è positiva/negativa/nulla, riportandole nel diagramma sottostante (1p.).



(b) Si trovi un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x, y) = \lambda(xy)$. Si trovi poi un integrale primo (4p.).

$$\frac{\partial}{\partial y}\lambda(xy)y(1+y^2) = \frac{\partial}{\partial x}\lambda(xy)\left(x(1+y^2)+2y\right) \iff$$

$$x\lambda'(xy)y(1+y^2) + \lambda(xy)(1+3y^2) = y\lambda'(xy)\left(x(1+y^2)+2y\right) + \lambda(xy)(1+y^2) \iff$$

$$\lambda'(xy)\left(xy\cancel{(1+y^2)} - xy\cancel{(1+y^2)} - 2y^2\right) = \lambda(xy)\left(\cancel{-1}-3y^2\cancel{+1}+y^2\right) \iff$$

$$\lambda'(xy)(-2y^2) = \lambda(xy)(-2y^2) \iff \lambda' = \lambda \iff \lambda(t) = \lambda(0)e^t.$$

Posso prendere $\lambda(0)=1$ quindi $\boxed{\lambda(xy) = e^{xy}}$. Supponiamo ϕ integrale primo $\Rightarrow$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = e^{xy}y(1+y^2) \iff \phi(x,y) = e^{xy}(1+y^2) + c(y).$$ Derivo in y:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x e^{xy}(1+y^2) + e^{xy}2y + c'(y)$$ che deve coincidere con $e^{xy}(x(1+y^2)+2y)$

se ne ricava $c'=0 \Rightarrow$ $\boxed{\phi(x,y) = e^{xy}(1+y^2) + \text{costante}}$

QUINDI SE $y(x)$ RISOLVE L'EQUAZIONE SI HA

$$(\star) \qquad e^{xy(x)}\left(1+y(x)^2\right) = c \; (\in \mathbb{R})$$

(c) Si dimostri che esiste una unica soluzione y_0 prolungabile a $x = 0$ e che si ha $y_0(0) = 0$ (2p.). Si usino queste informazioni per rappresentare, nel diagramma di prima, l'andamento qualitativo delle soluzioni (1p.).

Dalla $(\star)$ si ricava $xy = \ln\frac{c}{1+y^2} = \gamma - \ln(1+y^2)$ $\quad(\gamma = \ln(c))$

$\iff x = \frac{\gamma}{y} - \frac{\ln(1+y^2)}{y}$. Se voglio che $y(x)$ passi per $(0,0) \Rightarrow \gamma=0$ $(c=1)$

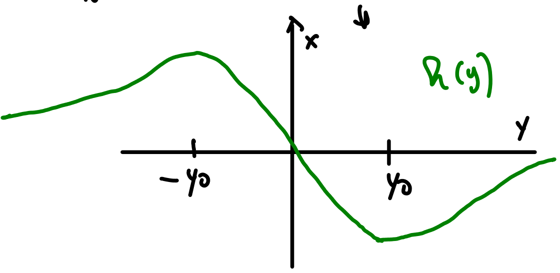
Consideriamo $h(y) := -\frac{\ln(1+y^2)}{y}$. Se $y\to 0$ si ha $h(y) = \frac{-y^2+o(y^2)}{y} = -y+o(y)$

quindi posso prolungare $h(y)$ in $y=0$ con le proprietà $h(0)=0$ $h'(0)=-1$

Facendo un veloce studio di funzione si ricava h dispari, $h(y)\to 0$ se $y\to\pm\infty$

$h'(y) = \dfrac{-\frac{2y^2}{1+y^2}+\ln(1+y^2)}{y^2}$ si annulla in $\pm y_0$ con $y_0>0$ $(\simeq 3{,}9)$ e ho quindi

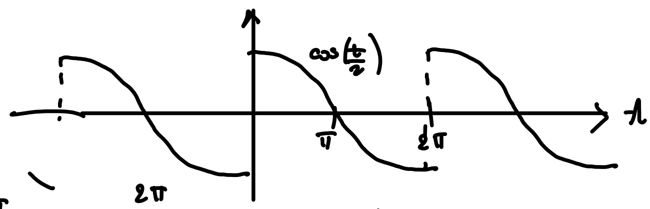
il seguente aspetto. Se scambiano y e x otteniamo la curva rappresentata nel diagramma che è l'unica che passa per $(0,0)$



Dai teoremi di unicità si ricava l'andamento rappresentato nel diagramma.

4. Si consideri la funzione $f(t) := \cos(t/2)$ per $t \in [0, 2\pi]$ ed estesa a tutto $\mathbb{R}$ in modo da essere periodica di periodo 2π.

(a) Si calcoli lo sviluppo in serie di Fourier di f (3p.)



La funzione è DISPARI e quindi $a_n = 0$

mentre

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t/2)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\underbrace{\left[2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin(nt)\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2n}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(nt)\,dt =$$

$$-\frac{2n}{\pi}\underbrace{\left[-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos(nt)\right]_0^{2\pi}}_{=4} + \frac{4n^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin(nt)\,dt = -\frac{8n}{\pi} + 4n^2 b_n$$

$$b_n = -\frac{8n}{\pi}\frac{1}{1-4n^2} = \boxed{\frac{1}{\pi}\frac{8n}{4n^2-1}}$$

DUNQUE

$$(**) \quad f(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n}{4n^2-1}\sin(nt) \qquad (\text{se } t \neq 2k\pi;\ \text{se } t = 2k\pi \text{ trovo zero})$$

(b) Si dica se la serie di Fourie converge uniformemente a f (1p.)

NON PUÒ CONVERGERE UNIFORMEMENTE perché f è discontinua in $t = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

(c) Si usino i calcoli fatti per trovare la somma della serie $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k+1}{16k^2+16k+3}$ (2p.)

Se prendo $t = \pi$ trovo

$$0 = f(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{8n}{4n^2-1}\sin(n\pi) = \left(\begin{array}{l}\text{se } n \text{ è pari } \sin(n\pi)=0 \\ \text{se } n = 2k+1 \ \sin(n\pi) = (-1)^k\end{array}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{8(2k+1)}{4(2k+1)^2-1}(-1)^k = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{16k^2+16k+3}(-1)^k = \frac{8}{\pi}\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{16k^2+16k+3}(-1)^k$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{16k^2+16k+3}(-1)^k = \frac{-8}{3\pi}}$$