COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 28 novembre 2016 - PARTE A[1]

1. Scrivere la definizione di funzione differenziabile e di differenziale (2 p.)

$f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ con $\Omega$ aperto di $\mathbb{R}^N$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$ (N, M INTERI)

$f(x)$ si dice differenziabile in $x_0$ se esiste una applicazione lineare $L$ tale che $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$.
Se tale $L$ esiste lo si chiama differenziale di $f$ in $x_0$.
[Si dimostra in effetti che un tale $L$ è unico dato che $Lv = f'(x_0)v \quad \forall v \in \mathbb{R}^N$]

2. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{9x^2 + 4y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

è continua SI NO;
è differenziabile SI NO.
(1 p. per domanda).

3. Se $f(x,y) = (x-1)e^{x-y}$ si scriva il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato nel punto $(1,1)$ (è consentito scrivere il polinomio nelle variabili $(x-1)$ e $(y-1)$, senza sviluppare tutte le potenze di questi binomi) (2 p.):

$$P_3(x,y) = (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)^2(y-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)(y-1)^2}{2}$$

[1] PUNTEGGIO MINIMO Voto A $\geq 4$; Voto A+Voto B $\geq 10$ Tempo: 1/2 ora per la parte A, 1 ora per la parte B

4. Sia $g(x,y) = \begin{pmatrix} e^{xy} + 3x \\ e^{xy} - y \end{pmatrix}$. Si dia per scontato che $g^{-1}$ è ben definita dove serve.

(a) si calcoli la matrice jacobiana di $g^{-1}$ nel punto $(1,1)$ (2p.);

$$J_{g^{-1}}(1,1) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J_f\left(\tfrac{3}{5}, \tfrac{1}{5}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(b) posto $f(\xi,\eta) := g^{-1}(2\xi - \eta, \xi + 2\eta)$ si calcoli la matrice jacobiana di $f$ nel punto $\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ (2p.):

(2) (a) IN COORD. POLARI $|f| = \left| \dfrac{\rho^3 \cos^2\theta \sin\theta}{\rho^2 (9\cos^2\theta + 4\sin^2\theta)} \right| \leq \dfrac{\rho}{4} \to 0$ se $\rho \to 0$

QUINDI $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ perché $f(x,0) = f(0,y) = 0$. Se fosse diff. $\Rightarrow df(0,0) = 0$

da cui $0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x y^2}{(9x^2 + 5y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$

MA se si fa questo limite su $y = mx$, con $m \in \mathbb{R}$, si trova

$$\lim_{x\to 0} \frac{m^2 x^3}{x^3 (9 + 5m^2)\sqrt{1+m^2}} = \frac{m^2}{(9+5m^2)\sqrt{1+m^2}} \neq 0 \quad (\text{per } m \neq 0)$$

DUNQUE $f$ NON È DIFFERENZIABILE

(3) $(x-1)e^{x-y} = (x-1)\, e^{(x-1)}\, e^{-(y-1)} =$

$(x-1)\left(1 + (x-1) + \dfrac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)\right)\left(1 - (y-1) + \dfrac{(y-1)^2}{2} + o((y-1)^2)\right) =$

$(x-1)\left(1 + (x-1) - (y-1) - (x-1)(y-1) + \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(y-1)^2}{2} + o(\|x-1, y-1\|^2)\right)$

$(x-1) + (x-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)^2(y-1) + \dfrac{(x-1)^3}{2} + \dfrac{(x-1)(y-1)^2}{2} + o(\|x-1, y-1\|^3)$

SI PUÒ ANCHE USARE LA DEFINIZIONE DI $P_3$:

$f(1,1) = 0$; $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y} + (x-1)e^{x-y} = x e^{x-y} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -(x-1)e^{x-y} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (x+1)e^{x-y} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 1$; $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} f = (x-1)e^{x-y} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 0$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -x e^{x-y} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = -1$

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} = (x+2)e^{x-y} \Rightarrow \dfrac{1}{6}\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,1) = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f = -(x+1)e^{x-y} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(1,1) = -1$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = x e^{x-y} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(1,1) = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -(x-1)e^{x-y} \Rightarrow \dfrac{1}{6}\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,1) = 0$

(4)(a) $J_g(x,y) = \begin{pmatrix} y e^{xy} + 3, & x e^{xy} \\ y e^{xy}, & x e^{xy} - 1 \end{pmatrix}$ $\quad J_g(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad g(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$g^{-1}(1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J_{g^{-1}}(1,1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) se $\phi(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} 2\xi - \eta \\ \xi + 2\eta \end{pmatrix} \Rightarrow J_\phi(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad \phi\left(\tfrac{3}{5}, \tfrac{1}{5}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f = g^{-1} \circ \phi \Rightarrow J_f\left(\tfrac{3}{5}, \tfrac{1}{5}\right) = J_{g^{-1}}(1,1) \cdot J_\phi\left(\tfrac{3}{5}, \tfrac{1}{5}\right) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) := x^2y^2 + \dfrac{4}{x^2 + y^2}$.

(a) Si dica qual è il dominio di $f$ (1p.)

$D = \{(x,y) \neq (0,0)\}$

(b) Si trovino tutti i punti stazionari di $f$ e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (6p.).

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 - \frac{8x}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - \frac{8y}{(x^2+y^2)^2}$

Pti critici $\begin{cases} xy^2 = \frac{4x}{(x^2+y^2)^2} \\ x^2y = \frac{4y}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ oppure } y^2 = \frac{4}{(x^2+y^2)^2} \\ y=0 \text{ oppure } x^2 = \frac{4}{x^2+y^2} \end{cases}$

SE $x=0$ LA II$^a$ RIGA $\Rightarrow y=0$
SE $y=0$ LA I$^a$ RIGA $\Rightarrow x=0$
MA $(0,0)$ NON È ACCETTABILE

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{4}{(x^2+y^2)^2} \\ x^2 = \frac{4}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^2 = \frac{1}{x^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm x \\ x = \pm 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ QUATTRO PUNTI $(\pm 1, \pm 1)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2 - \frac{8(x^2+y^2)^2 - 8x\,2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} = 2y^2 - 8\frac{x^2+y^2-4x^2}{(x^2+y^2)^3} = 2y^2 + 8\frac{3x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 + 8\frac{3y^2-x^2}{(x^2+y^2)^3}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy - 8x\frac{-2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4} = 4xy + \frac{32xy}{(x^2+y^2)^3} = 4xy\left(1 + \frac{8}{(x^2+y^2)^3}\right)$

$Hf(\pm 1, \pm 1) = \begin{pmatrix} 4 & \pm 8 \\ \pm 8 & 4 \end{pmatrix}$

$\uparrow$
+ se concordi
− se discordi

Det $< 0 \Rightarrow$ TUTTE SELLE

.

(c) Si trovino il massimo e il minimo di $f$ sull'insieme $D := \{x+y=1, x \geq 0, y \geq 0\}$ (5p.)

POSSIAMO USARE I MOLTIPLICATORI RISPETTO ALLA CONDIZIONE $0 = g(x,y) = x+y-1$ $\left(\nabla g = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$

$$\begin{cases} 2xy^2 - \frac{8x}{(x^2+y^2)^2} = \lambda \\ 2x^2y - \frac{8y}{(x^2+y^2)^2} = \lambda \\ x+y=1 \quad x>0 \quad y>0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2xy^2 - \frac{8x}{(x^2+y^2)^2} \\ 2xy^2 - \frac{8x}{(x^2+y^2)^2} = 2x^2y - \frac{8y}{(x^2+y^2)^2} \\ x+y=1 \quad x>0 \quad y>0 \end{cases}$$

La seconda riga $\iff$ $2xy(y-x) + \frac{8}{(x^2+y^2)^2}(y-x) = 0 \iff \begin{cases} y=x \\ 2xy + \frac{8}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{IMPOSSIBILE} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2x^3 - \frac{2}{x^3} \\ y = x \\ 2x = 1 \end{cases} \iff \boxed{x = y = \frac{1}{2}} \iff \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

OLTRE AL SISTEMA SOPRA DOBBIAMO CONSIDERARE I DUE PUNTI $(1,0)$ e $(0,1)$. Dato che

$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{4}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{16} + \frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{16} + 8$

$f(1,0) = 0 + 4 = f(0,1)$

DUNQUE $\max_D f = 8 + \frac{1}{16}$ $\quad \min_D f = 4$

SI PUO' ANCHE studiare $h(t) = f(t, 1-t) = t^2(1-t)^2 + \frac{4}{t^2+(1-t)^2}$ per $t \in [0,1]$

$\Rightarrow h'(t) = 2t(1-t)^2 - 2t^2(1-t) - 4\frac{2t - 2(1-t)}{(t^2+(1-t)^2)^2} =$

$2t(1-t)(1-t-t) - 8\frac{(2t-1)}{(2t^2-2t+1)^2} = -2\underbrace{(2t-1)}_{\text{SI ANNULLA IN } t=1/2}\underbrace{\left(t(1-t) + \frac{8}{(2t^2-2t+1)^2}\right)}_{>0 \text{ in } ]0,1[}$

DUNQUE $h'(t) = 0 \iff t = \frac{1}{2}$.

INOLTRE DEVO CONTROLLARE GLI ESTREMI $t=0, t=1$ $\Rightarrow$ STESSO RISULTATO VISTO SOPRA

2. Sia $V := \{(x,y,z) : e^{x^2+y^2+z^2} - xy = e\}$

(a) Si verifichi che $V$ è un insieme regolare di codimensione 1 (3p.)

Poniamo $g(x,y) = e^{x^2+y^2+z^2} - xy - e$. Allora

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+z^2} - y$

$\frac{\partial g}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2+z^2} - x$

$\frac{\partial g}{\partial z} = 2ze^{x^2+y^2+z^2}$

VEDIAMO DOVE $\nabla g = 0$

$$\begin{cases} y = 2xe^{x^2+y^2+z^2} \\ x = 2ye^{x^2+y^2+z^2} \\ 2ze^{x^2+y^2+z^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2xe^{x^2+y^2} \\ x = 2ye^{x^2+y^2} \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 4x\left(e^{x^2+y^2}\right)^2 \iff \begin{cases} x = 0 \\ 4\left(e^{x^2+y^2}\right)^2 = 1 \end{cases}$

SE $x=0 \Rightarrow y=0$

SE NO $e^{x^2+y^2} = 1/2$ IMPOSSIBILE PERCHÉ $e^{x^2+y^2} \geq 1$

L'UNICO PUNTO CRITICO È $(0,0,0)$

DATO CHE $g(0,0,0) = e^0 - e = 1 - e \neq 0$ $\quad (0,0,0) \notin V$ E QUINDI NON CI SONO PUNTI DI V con $\nabla g = 0$

$\iff V$ è regolare

(b) Si verifichi che $P_0 := (0,1,0) \in V$ e si mostri che vicino a $P_0$ l'insieme $V$ si descrive come grafico di una funzione $y = f(x,z)$ con $f$ definita in un intorno di $(0,0)$ (2p.).

$g(0,1,0) = e^1 - 0 - e = 0$ DUNQUE $(0,1,0) \in V$

Per vedere che $V$ è grafico di una $y = f(x,z)$ bisogna verificare che $\frac{\partial g}{\partial y}(0,1,0) \neq 0$. In effetti $\frac{\partial g}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2+z^2} - x \Big|_{\substack{x=0\\y=1\\z=0}} = 2e \neq 0$

(USO IL T. DEL DINI)

(c) Si calcolino $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0)$ (3p.)

Per il Dini si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x} g(0,1,0)}{\frac{\partial}{\partial y} g(0,1,0)} = -\frac{2xe^{x^2+y^2+z^2} - y}{2ye^{x^2+y^2+z^2} - x}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=1\\z=0}} = -\frac{1}{2e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0) = -\frac{\frac{\partial}{\partial z} g(0,1,0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(0,1,0)} = -\frac{2ze^{x^2+y^2+z^2}}{2ye^{x^2+y^2+z^2} - x}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=1\\z=0}} = 0$$

(d) Si dica se $V$ è limitato (3p.)

Basta dimostrare che $\lim_{\|(x,y,z)\| \to \infty} g(x,y,z) = +\infty$. INFATTI

$$g(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2} - xy \geq e^{x^2+y^2+z^2} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \geq e^{x^2+y^2+z^2} - \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$$

Dato che $\lim_{t \to +\infty} e^{t^2} - \frac{t^2}{2} = +\infty$ IL LIMITE DI $g$ è $\infty$

Allora $V$ è limitato; INFATTI se il limite di $g$ è $+\infty$ per $\|xyz\| \to \infty$

$\Rightarrow$ esiste un raggio $R$ tale che $\|(x,y,z)\| \geq R \Rightarrow g(x,y,z) \geq e+1$

NE SEGUE CHE $V \subset B(0,R)$ ($V$ è limitato)

(e) (facolativo - verrà considerato solo se il voto del resto è $\geq 24$) Si mostri che i punti di $V$ più lontani dall'origine si trovano sull'intersezione di $V$ con la retta $\{z = 0, x = y\}$ (4p.)

Si tratta di massimizzare la norma di $(x,y,z)$ - o anche il suo quadrato sul vincolo $V$. Consideriamo allora $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ e usiamo i moltiplicatori per Lagrange $\max_V f$.

$$\begin{cases} 2x = \lambda\left(2x\, e^{x^2+y^2+z^2} - y\right) \\ 2y = \lambda\left(2y\, e^{x^2+y^2+z^2} - x\right) \\ 2z = \lambda\, 2z\, e^{x^2+y^2+z^2} \\ e^{x^2+y^2+z^2} - xy = e \end{cases}$$

moltiplico la I$^a$ riga per $y$, la II$^a$ per $x$ e sottraggo $\Rightarrow x^2 = y^2$ $\Rightarrow$

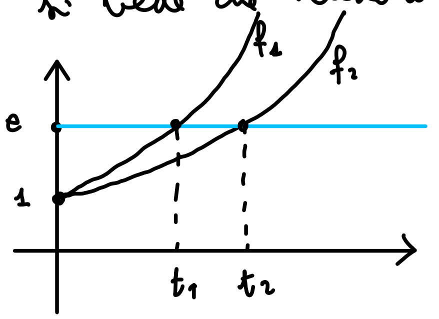
DUNQUE $x = \pm y$

$$\begin{cases} y = \pm x \\ 2x = \lambda x\left(2e^{2x^2+z^2} \mp 1\right) \\ z\left(e^{2x^2+z^2} - 1\right) = 0 \\ e^{2x^2+z^2} \mp x^2 = e \end{cases}$$

Dalla III riga o $z=0$ oppure $e^{2x^2+z^2} = 1$.
Ma $e^{2x^2+z^2} = 1 \iff x=y=z=0$ che non verifica la IV
DUNQUE $z = 0$
INOLTRE posso semplificare $x \neq 0$ nella II$^a$ riga

$$\begin{cases} y = \pm x, \ z = 0 \\ \lambda = 2\left(2e^{2x^2} \mp\right)^{-1} \\ e^{2x^2} \mp x^2 = e \quad \leftarrow (*) \end{cases}$$

CONSIDERIAMO $f_1(t) = e^{2t} + t$ e $f_2(t) = e^{2t} - t$. Si ha $f_1(0) = f_2(0) = 1$
$f_2'(t) = 2e^{2t}+1$ e $f_2'(t) = e^{2t} - 1 \geq 0$. Dunque $f_1$ e $f_2$ sono entrambe crescenti e si vede che tendono a $+\infty$ quando $t \to +\infty$. I GRAFICI SONO




DUNQUE $f_1(t) = e \iff t = t_1$
$f_2(t) = e \iff t = t_2$

con $\boxed{t_1 < t_2.}$

La condizione $(*)$ si traduce allora $x^2 = t_1$, se $y = -x$

$x_2 = t_2$ se $y = x$. DUNQUE I PTI CRITICI DI $f$ su $V$ sono $\pm(\sqrt{t_1}, -\sqrt{t_1}, 0)$ e $\pm(\sqrt{t_2}, \sqrt{t_2}, 0)$. Se calcoliamo $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ su questi punti troviamo $2t_1$ nel primo caso e $2t_2$ nel secondo. Dato che $t_2 > t_1$ il punto di massimo è $\pm(\sqrt{t_2}, \sqrt{t_2}, 0)$ che sta su $\{x=y, z=0\}$