COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 16 settembre 2016 - PARTE A[1]

1. Si stabilisca se l'insieme $M := \{x + y = e^{xy}\}$ è descrivible (localmente) da una curva regolare (3p.).

Uso il Dini e mostro che in tutti i punti di M si ha $\nabla g(x,y) \neq \vec{0}$ dove $g(x,y) = x + y - e^{xy}$. Se ci fosse un pto di M con $\nabla g(x,y) = \vec{0}$ avrei

$$\begin{cases} 1 - y e^{xy} = 0 \\ 1 - x e^{xy} = 0 \\ x + y = e^{xy} \end{cases}$$

Dalle prime due segue $x = y \Rightarrow$

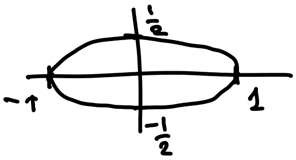
$$\begin{cases} x e^{x^2} = 1 \\ e^{x^2} = 2x \end{cases}$$

Ricavando e^{x^2} dalla seconda:

$2x^2 = 1 \iff x^2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ma allora $e^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{2}$ CHE È FALSO

2. Si calcoli $\oint_\gamma \overbrace{\left(\frac{y}{x^2+4y^2}\vec{\mathbf{i}} - \frac{x}{x^2+4y^2}\vec{\mathbf{j}}\right)}^{\vec{f}(x,y)} \cdot d\vec{s}$ dove γ descrive il bordo di $\Omega := \{x^2 + 4y^2 \leq 1\}$ (3p.).

Ω è un'ellisse



e $\partial\Omega$ lo posso descrivere mediante

$\gamma(t) = \cos(t)\,\vec{i} + \frac{\sin(t)}{2}\,\vec{j} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$\gamma'(t) = -\sin(t)\,\vec{i} + \frac{\cos(t)}{2}\,\vec{j}$

Allora

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} f\left(\cos t, \tfrac{1}{2}\sin t\right) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\frac{1}{2}\sin(t)}{\cos^2 t + \frac{4}{4}\sin^2 t}(-\sin(t)) - \frac{\cos(t)}{\cos^2 t + \frac{4}{4}\sin^2 t} \cdot \frac{\cos t}{2} \right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}\right) dt = \boxed{-\pi}$$

[1] PUNTEGGIO MINIMO VotoA$\geq$5p. Voto=VotoA+VotoB ($0 \leq$ Voto ≤ 40) - Lode se Voto≥ 35

3. Si dica (motivando) se il campo $\vec{f} := \frac{y}{x^2+4y^2}\mathbf{i} - \frac{x}{x^2+4y^2}\mathbf{j}$ è irrotazionale (1,5p) e se è conservativo (1,5p.).

- $\frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+4y^2} = \frac{x^2+4y^2-y\cdot 8y}{(x^2+4y^2)^2} = \frac{x^2-4y^2}{(x^2+4y^2)^2}$

  $\frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+4y^2} = -\frac{x^2+4y^2-x\cdot 2x}{(x^2+4y^2)^2} = \frac{x^2-4y^2}{(x^2+4y^2)^2}$

  SONO "=" DUNQUE $\vec{f}$ $\boxed{\text{è IRROTAZIONALE}}$

- Dall'esercizio di prima $\Rightarrow \int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = -2\pi \neq 0$

  e γ è uno arco chiuso $\Rightarrow \vec{f}$ $\boxed{\text{NON È CONSERVATIVO}}$

4. Si trovi il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4+2^n}$ (1,5 p.) e si dica per quali x la serie converge (1.5p).

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{4+2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2\sqrt[n]{\frac{4}{2^n}+1}} = \frac{1}{2} \quad \left(\text{perché } \sqrt[n]{n}\to 1 \text{ e } \sqrt[n]{1+o(1)} \to 1\right)$$

Dunque $\boxed{R=2}$ e la serie converge su $]-2,2[$ e non converge fuori $[-2,2]$

Se $x=2$ trovo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{4+2^n}$ se $x=-2$ trovo $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n2^n}{4+2^n}$

Dato che $\frac{n2^n}{4+2^n} \to \infty \Rightarrow$ LE DUE SERIE NON CONVERGONO PERCHÉ IL LORO TERMINE GENERALE NON TENDE A ZERO.

DUNQUE LA SERIE DI POTENZE CONV. PER $\boxed{-2<x<2}$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

   (a) Se f è una funzione definita in un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$ che ammette derivate parziali prime e seconde e se f è continua in Ω, allora $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ in Ω. [VERO] [~~FALSO~~]

   Devono essere continue le derivate seconde

   (b) La funzione $f(x,y) := \frac{1}{\|(x,y)\|}$ è integrabile in senso improprio in un intorno dell'origine di $\mathbb{R}^2$.

   [~~VERO~~] [FALSO]

   (c) Se $\vec{f}$ è un campo irrotazionale in $\mathbb{R}^2$ allora $\oint_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = 0$ per ogni curva chiusa γ in $\mathbb{R}^2$

   [~~VERO~~] [FALSO].

   dato che $\mathbb{R}^2$ è stellato $\Rightarrow \vec{f}$ è conservativo

   (d) La funzione $f(x,y) := \frac{e^{xy}}{x^2+y^2}$ ammette massimo sul cerchio chiuso di centro $(3,2)$ e raggio $\sqrt{2}$.

   . [~~VERO~~] [FALSO].

   f è continua sul cerchio ($(0,0) \notin$ cerchio)

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) := 4x^2 - y^2 + \dfrac{12xy}{x^2 + y^2}$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f ~~e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella~~ (4p.).

Notiamo che $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ — il dominio è $\mathbb{R}^2$ meno l'origine. Fuori da $(0,0)$ f è differenziabile quanto si vuole. Si ha (se $(x,y) \neq (0,0)$)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 8x - 12y \frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \; ; \; \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -2y + 12x \frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Chiamo $A(x,y) := \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

I pti stazionari verificano $\begin{cases} 2x = 3y A(x,y) \\ y = 6x A(x,y) \end{cases}$ da cui $2x = 3A(x,y) 6x A(x,y)$ che equivale a $x=0$ oppure $1 = 9A(x,y)^2 \iff A(x,y) = \pm\frac{1}{3}$

Se $x=0 \Rightarrow y=0$ IMPOSSIBILE ($(0,0) \notin$ Dominio). Se $x \neq 0$

$$\begin{cases} y = \pm \frac{6}{3} x \\ A(x,y) = \pm\frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \pm 2x \\ \dfrac{x^2 - 4x^2}{(x^2+4x^2)^2} = \pm\frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \pm 2x \\ -\frac{3}{25}\frac{1}{x^2} = \pm\frac{1}{3} \end{cases}$$

IL SEGNO + È IMPOSSIBILE. DUNQUE $y = -2x$ $x^2 = \frac{9}{25} \iff (x,y) = \boxed{\pm\left(\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}\right)}$

Calcolando le derivate seconde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 8 - 24xy\frac{(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3} \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2 - 24xy \frac{(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} \, , \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-12(x^4+y^4-3x^2y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

ma non è richiesto - -

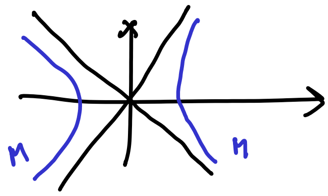
   (b) Si dica se l'insieme $M := \{f(x, y) < 9\}$ è un aperto regolare (1p.).

Sì perché nei punti in cui $f(x,y) = 9$ il gradiente è $\neq 0$.

Infatti i punti con $\nabla f = 0$ sono $\pm\left(\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}\right)$ in cui f vale $-\frac{24}{5} \neq 9$

(c) Si dica se M è limitato (2p.) (suggerimento: dato $m \in \mathbb{R}$ si cerchi la soluzione x_m di $f(x, mx) = 9$ e si veda cosa succede se $m \to 2$).

Fissiamo $m \in \mathbb{R}$. Allora $f(x,mx) = (4-m^2)x^2 + \frac{12m}{1+m^2}$. In particolare se $m = 2$ f è costante e vale $\frac{24}{5}$. Se $m \neq 2$ l'equazione $(4-m^2)x^2 + \frac{12m}{1+m^2} = 9 \iff x^2 = \left(9 - \frac{12m}{1+m^2}\right)/(4-m^2)$ è risolubile purché $4-m^2>0$ (si vede che $9-\frac{12m}{1+m^2}$ è sempre >0), cioè per $-2<m<2$, e le soluzioni sono $x = \pm x_m := \sqrt{\left(9-\frac{12m}{1+m^2}\right)(4-m^2)}$. Si vede allora che, se $m \to 2^-$ (o $m \to -2^+$) $\Rightarrow x_m \to +\infty$ e quindi ci sono punti di M arbitrariamente grandi $\Rightarrow$ M NON È LIMITATO



2. Si considerino gli insiemi

$$\Omega := \{x^2+y^2+z^2 \le 4, x^2+y^2 \ge 1, z \ge 0\}, \qquad S := \{x^2+y^2+z^2 = 4, x^2+y^2 \ge 1, z \ge 0\}$$
$$A := \{1 \le x^2+y^2 \le 4, z = 0\}, \qquad C := \{x^2+y^2 = 1, 0 \le z \le \sqrt{3}\}.$$

e il campo vettoriale

$$\vec{f} := \frac{xz}{x^2+y^2}\vec{\mathbf{i}} + \frac{yz}{x^2+y^2}\vec{\mathbf{j}} + z^2(x^2+y^2)\vec{\mathbf{k}}.$$

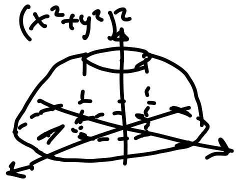
Si calcolino i flussi di $\vec{f}$ su $\partial\Omega$ (4p.) e sulle superfici definite da S (1p.), A (1p.)e C (2p.).

Per il primo flusso a normale è da intendersi definita come uscente da Ω; su S/C consideriamo la normale che si allontana dall'origine mentre su A prendiamo la normale concorde con l'asse z.

Usiamo il th. della divergenza per il flusso su $\partial\Omega$. Si ha

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{f}\,dxdydz = \iiint_\Omega \left[z\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + z\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + 2z(x^2+y^2)\right]dxdydz =$$

$$\iiint_\Omega 2z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iint_A (x^2+y^2)\left(\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 2z\,dz\right)dxdy =$$



$$\iint_A (x^2+y^2)\left[z^2\right]_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}dxdy = \iint_A (x^2+y^2)(4-x^2-y^2)\,dxdy = (\text{coord. polari})$$

$$2\pi\int_1^2 \rho^2(4-\rho^2)\rho\,d\rho = 2\pi\int_1^2 (4\rho^3-\rho^5)\,d\rho = 2\pi\left[\rho^4 - \frac{\rho^6}{6}\right]_1^2 = 2\pi\left(16-\frac{64}{6}-1+\frac{1}{6}\right) =$$

$$\pi\left(32-\frac{64}{3}-2+\frac{1}{3}\right) = \boxed{9\pi}$$

- Il flusso su A, applicando la def, viene $\iint_A \vec{f}(x,y,0)\cdot\vec{k}\,dxdy = \boxed{0}$ perché $\vec{f}\cdot\vec{k} = f_3$ e $f_3(x,y,0) = 0$
- Per calcolare il flusso su C parametrizzo C: $\Gamma(\theta,z) = \cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j} + z\vec{k}$ al variare di $\theta \in [0,2\pi]$ e $z \in [0,\sqrt{3}]$. Allora $\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$ e $\frac{\partial}{\partial z}\Gamma = \vec{k} \Rightarrow \vec{N}(\theta,z) := \frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}\otimes\frac{\partial\Gamma}{\partial z} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ (che è di norma 1.)

$$\Rightarrow \iint_C \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\vec{f}(\cos\theta,\sin\theta,z)\cdot(\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j})\,dz =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} z\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} z\, dz = \pi\left[z^2\right]_0^{\sqrt{3}} = 3\pi$$

• Infine, dato che $\partial\Omega =$ " $S - C - A$ " (tenendo conto delle normali)

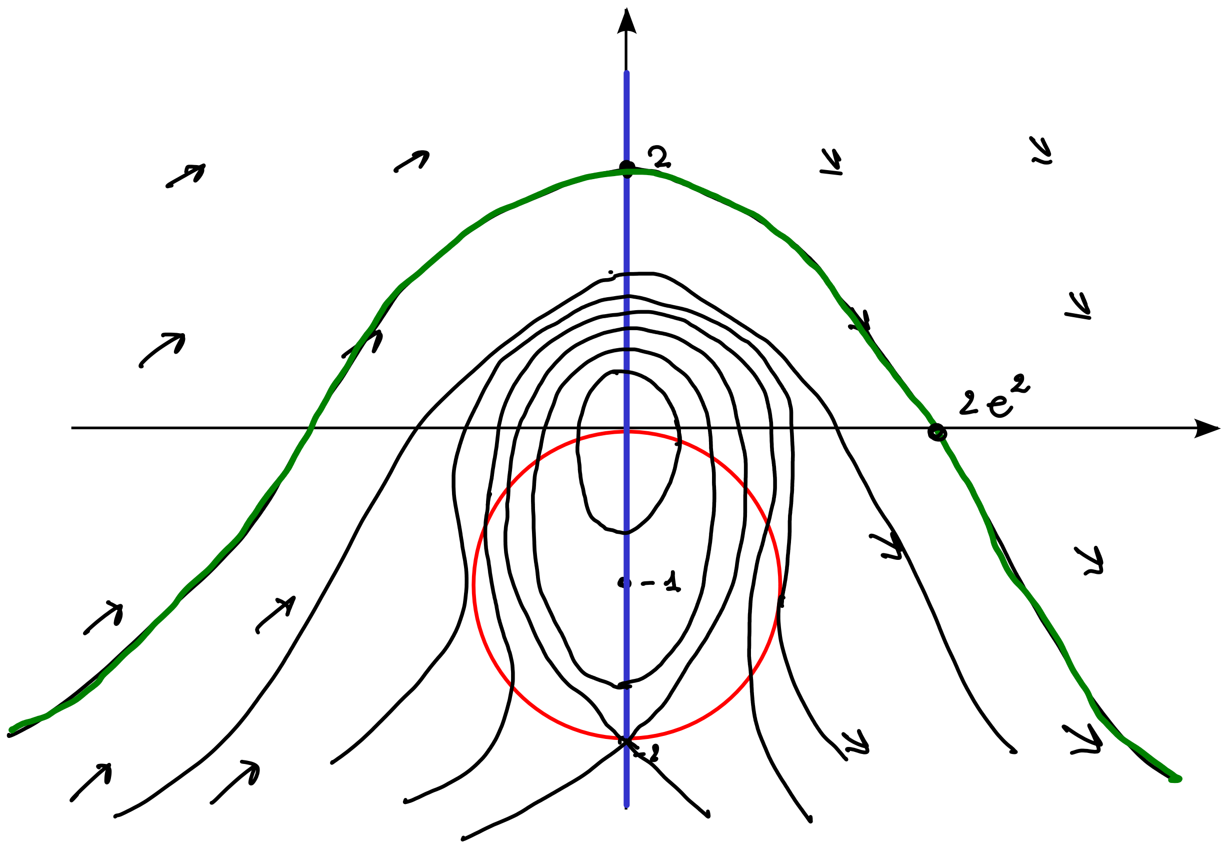
$$\frac{26}{3}\pi = \Phi(\vec{f}, \partial\Omega) = \Phi(\vec{f}, S) - \Phi(\vec{f}, C) - \Phi(f, A) = \Phi(\vec{f}, S) - 3\pi$$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{f}, S) = 9\pi + 3\pi = 12\pi$$

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{-2x}{x^2 + y^2 + 2y} \qquad (=: F(x,y))$$

(a) Si trovi il dominio della funzione $F(x,y)$ e le zone del piano xy in cui F è positiva/negativa/nulla, riportandole nel diagramma sottostante. Si usino tali informazioni per tracciare un grafico qualitativo (anche parziale) delle soluzioni dell'equazione (1p.).



$$F(x,y) = \frac{-2x}{x^2 + (y+1)^2 - 1}$$

. Il denominatore si annulla sulla circonferenza di centro $(0,-1)$ e raggio 1

(b) Si trovi un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x,y)=\lambda(x^2+y^2)$. Si trovi poi un integrale primo (4p.).

Deve essere $\frac{\partial}{\partial y}\, 2x\,\lambda(x^2+y^2) = \frac{\partial}{\partial x}\,(x^2+y^2+2y)\,\lambda(x^2+y^2) \iff$

$2x\,\lambda'(\cancel{x^2+y^2})\,2y = 2x\,\lambda(x^2+y^2)+(x^2+y^2\cancel{+2y})\,\lambda'(x^2+y^2)\,2x \iff 0=\cancel{2x}\,\lambda(x^2+y^2)+\cancel{2x}(x^2+y^2)\,\lambda'(x^2+y^2)$

$\iff \lambda'(r) = -\frac{\lambda(r)}{r}$ da cui $\lambda(r)=\frac{c}{r}$ con $c\in\mathbb{R}$. Posso prendere $\boxed{\lambda(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}}$

Cerco un int. primo $\phi(x,y)$. Deve essere

$\frac{\partial}{\partial x}\phi = \frac{2x}{x^2+y^2} \iff \phi(x,y)=\ln(x^2+y^2)+\text{cost}(y)$ e

$\frac{\partial}{\partial y}\phi = \frac{x^2+y^2+2y}{x^2+y^2} = 1+\frac{2y}{x^2+y^2} \Rightarrow \text{cost}(y)=y+\text{cost}.$ In definitiva

$\boxed{\phi(x,y)=\ln(x^2+y^2)+y}$ (+ costante $\in\mathbb{R}$)

(c) Si tracci nel diagramma iniziale la soluzione $y(x)$ relativa al dato iniziale $(0,2)$ (1p.); inoltre:

- si trovi il tempo $x_0>0$ (se esiste) per cui $y(x_0)=0$ (1p.):

Deve essere $\phi(x,y)=$ costante. Se prendo $x=0$ $y=2$ $\Rightarrow \phi(0,2)=\ln(4)+2$

e quindi $\phi(x,y(x))=\ln(4)+2$.

È chiaro che $y(x)$ esiste decrescente fino a che non interseca l'asse x (vedi il disegno). Se $y(x_0)=0 \Rightarrow \phi(x_0,0)=\ln(4)+2 \iff$

$2\ln(x_0)=2\ln(2)+2 \iff x_0=e^{\ln(2)+2}=\boxed{2e^2}$

- si mostri che $y(x)$ esiste per ogni $x>0$ (1p.) e che $\lim_{x\to+\infty} y(x)=-\infty$ (1p.).

Dato che $x_0>1$, la $y(x)$ non può mai intersecare la circonferenza rosso.

e quindi è sempre decrescente fino al tempo massimale $\bar{x}$. Se $\bar{x}<+\infty \Rightarrow$

$\bar{y}:=\lim_{x\to\bar{x}^+} y(x)$ sarebbe $-\infty$. Ma $\phi(0,2)=\phi(x,y)=\ln(\underset{\bar{x}^2}{\underset{\downarrow}{x^2}}+\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{y^2}})+\underset{-\infty}{\underset{\downarrow}{y}}\to-\infty$

(y "vince" su $\ln(x^2+y^2)$) ASSURDO. DUNQUE $\underline{\bar{x}=+\infty}$

Se poi fosse $\bar{y}>-\infty$ avrei: $\phi(0,2)=\ln(\underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{x^2}}+\underset{\bar{y}^2}{\underset{\downarrow}{y^2}})+\underset{\bar{y}}{\underset{\downarrow}{y}}\to+\infty$ ASSURDO

Dunque $\underline{\bar{y}=-\infty}$

4. Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$xy''(x) + y'(x) - xy(x) = 0$$

Si cerchino le soluzioni esprimibili come serie di potenze centrate in zero, cioè del tipo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. In particolare:

(a) si trovi una relazione ricorsiva per i coefficienti a_n (3p.);

Se $y(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow y''(x) = \sum_{2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ e dunque

$$x y''(x) = \sum_{2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{1}^{\infty} (n+1) n\, a_{n+1} x^n$$

$$y'(x) = \sum_{1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = a_1 + \sum_{1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$x y(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{1}^{\infty} a_{n-1} x^n.$$

IMPONENDO L'EQ:

$$a_1 + \sum_{1}^{\infty} \Big[\underbrace{(n+1)n\, a_{n+1} + n a_{n+1}}_{(n+1)^2 a_{n+1}} - a_{n-1}\Big] x^n = 0 \iff$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_{n-1}}{(n+1)^2} \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \qquad \text{OPPURE} \qquad \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = \dfrac{a_{n-2}}{n^2} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

(R)

NOTA CHE NON C'È NESSUNA CONDIZIONE SU a_0

(b) si provi che tutti gli a_n con n dispari sono nulli(1p.);

Dato che $a_1 = 0$, usando (R), $a_3 = \dfrac{a_1}{(3)^2} = 0$, $a_5 = \dfrac{a_3}{5} = 0$ e così via ... $\Rightarrow$ tutti gli a_{2k+1} sono nulli.

(c) si provi che gli a_n così definiti producono una serie di potenze di raggio infinito (1p.);

Se considero gli a_{2k} vedo che (R) si trasforma in

$$a_{2k} = \frac{a_{2k-2}}{(2k)^2} = \frac{a_{2(k-1)}}{(2k)^2}.$$

Se applico il criterio del rapporto

$$\frac{a_{2k}}{a_{2(k-1)}} = \frac{1}{2k^2} \to 0 \Rightarrow \sqrt[k]{a_{2k}} = 0.$$

Dunque la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$ ha raggio di conv. infinito. Dato che $a_{2k+1} = 0$ questa è proprio la $y(x)$.

(d) si dica se in questo modo si riesce a risolvere il problema con condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ (1p.).

NON È POSSIBILE RISOLVERE QUESTO PROBLEMA DATO CHE $y'(0) = c_1$ che deve per forza fare zero