COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 25 luglio 2016 - PARTE A[1]

1. Si scriva la definizione di convergenza totale per una serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, con $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ (2p.)

La serie converge totalmente se la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{0 \le x \le 1} |f_n(x)| \quad \text{è convergente}$$

2. Si trovi una parametrizzazione per l'insieme ottenuto intersecando il cilindro $C := \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 4\}$ con l'iperboloide $S := \{z = y^2 - 4x^2\}$ (3p.).

La "base" si descrive con $x = 2\cos(\theta)$ $y = 2\sin(\theta)$ con $0 \le \theta \le 2\pi$

Imponendo $z = y^2 - 4x^2$ si trova la curva

$$\gamma(\theta) = 2\cos\theta\, \vec{i} + 2\sin\theta\, \vec{j} + (4\sin^2\theta - 16\cos^2\theta)\vec{k} = \text{(volendo)}$$

$$2\cos\theta\, \vec{i} + 2\sin\theta\, \vec{j} - (6 + 10\cos 2\theta)\vec{k}$$

[1] PUNTEGGIO MINIMO VotoA$\geq$5p. Voto=VotoA+VotoB ($0 \leq$ Voto ≤ 40) - Lode se Voto≥ 35

3. Si dica (motivando) se il campo $\vec{f} := \dfrac{x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$ è conservativo . (3p.).

Il campo è conservativo perché è radiale: $\vec{f}(X) = \psi(\|X\|)\cdot \hat{X}$ dove $\hat{X} = \dfrac{X}{\|X\|} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$ e $\psi(\rho) = \dfrac{1}{\rho^5}$. Come è noto un potenziale si trova con la formula $F(X) = \Psi(\|X\|)$ dove $\Psi' = \psi$: in questo caso $\Psi(\rho) = -\dfrac{1}{4\rho^4} \left(= \dfrac{1}{-4}\rho^{-4}\right)$ cioè

$$F(x,y,z) = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

4. Data la serie di Fourier $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{1+n^4}\cos(nt)$ si dica se f è continua e se f è derivabile (3 p.)

Si ha $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt)$ con $a_n = \dfrac{n}{1+n^4}$

Dato che $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{1+n^4}$ converge essendo $a_n \simeq \dfrac{1}{n^3}$ la serie converge unif. e <u>f è continua</u>

Dato che $n|a_n| \simeq \dfrac{1}{n^2}$ anche $\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|$ converge per cui la serie delle derivate converge unif e <u>f è derivabile</u>

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Se f è una funzione definita in un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$ e se f è continua in Ω, allora f è differenziabile in Ω. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\cancel{\text{FALSO}}}$

(b) Se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile definita sull'anello $A := \{1 < x^2 + y^2 < 4\}$ con $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ per tutte le (x,y) in A, allora f è costante in A. $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

(c) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione radiale: $f(x,y) = \phi(\sqrt{x^2+y^2})$ per una opportuna ϕ continua (con ϕ funzione di una variabile). Sia $B := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. Allora $\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = 2\pi \int_0^1 \phi(\rho)\,d\rho$. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\cancel{\text{FALSO}}}$. $\left(= 2\pi \int_0^1 \rho\,\phi(\rho)\,d\rho\right)$

(d) Sia $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che $\nabla G(x,y) \neq \vec{0}$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Allora l'insieme $M := \{(x,y) : G(x,y) = 0\}$ è grafico di una funzione $y = f(x)$. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\cancel{\text{FALSO}}}$.

M è regolare $\Rightarrow$ punto per punto o è grafico $y = f(x)$ oppure è grafico $x = g(y)$

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 25 luglio 2016 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x,y) := e^{3-x^2-y^2} + xy^2$.

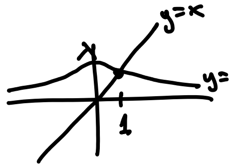
(a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (4p.).

$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x e^{3-x^2-y^2} + y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y e^{3-x^2-y^2} + 2xy$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (4x^2-2)e^{3-x^2-y^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (4y^2-2)e^{3-x^2-y^2} + 2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy\, e^{3-x^2-y^2} + 2y$. I pti staz. verificano

$\begin{cases} y^2 = 2x e^{3-x^2-y^2} \\ 2xy = 2y e^{3-x^2-y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} y=0 \\ y=0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} y^2 = 2x e^{3-x^2-y^2} \\ x = e^{3-x^2-y^2} \end{cases}$. Il secondo sistema $\iff \begin{cases} y^2 = 2x^2 \\ x = e^{3-x^2-y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = 2x^2 \\ x = e^{3-3x^2} \end{cases}$

Si vede facilmente che $x=1$ risolve la seconda equazione ed è l'unico valore possibile, come si capisce dai grafici di $y=x$ e $y=e^{3-3x^2}$ $\longrightarrow$



DUNQUE I PTI CRITICI SONO $\boxed{(0,0),\ (1,\sqrt{2}),\ (1,-\sqrt{2})}$

Vediamo la natura dei pti critici usando le derivate seconde.

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2e^3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, che ha entrambi gli autovalori $<0 \Rightarrow (0,0)$ è pto di MASSIMO

$H_f(1,\pm\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2 & \pm 6\sqrt{2} \\ \pm 6\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$ che ha determinante $= 8-72<0 \Rightarrow$ sono due pti di SELLA

(b) Si trovi il minimo di f sul vincolo $B := \{x^2+y^2 \le 9\}$ (2p.)

Il punto di minimo (che esiste per Weierstrass) non può essere interno a B perché i punti critici di f (visti sopra) sono pti di max o di sella. Dunque il pto di min. è su $\partial B = \{x^2+y^2=9\}$.

Su tale insieme $f(x,y)$ vale $e^{-6} + xy^2$. Possiamo allora cercare i pti di minimo di $g(x,y) := xy^2$ su $\partial B = \{x^2+y^2=9\}$. Possiamo usare i moltiplicatori di Lagrange

$\begin{cases} y^2 = 2\lambda x \\ 2xy = 2\lambda y \\ x^2+y^2=9 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda x = 0 \\ y = 0 \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} y^2 = 2x^2 \\ x = \lambda \\ x^2+y^2=9 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ y=0 \\ x=\pm 3 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} y = \pm\sqrt{6} \\ \lambda = x \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (\pm 3, 0) \\ (\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{6}) \end{matrix}$

Calcolando f su questi punti troviamo $f(\pm 3, 0) = e^{-6}$, $f(\pm\sqrt{3}, \sqrt{6}) = f(\pm\sqrt{3}, -\sqrt{6}) = e^{-6} \pm 6\sqrt{3}$

Il valore più basso è $\boxed{e^{-3} - 6\sqrt{3}}$ che dunque è il minimo (assunto nei due pti $(-\sqrt{3}, \pm\sqrt{6})$)

Si può anche fare parametrizzando $\partial B = \{(3\cos\theta, 3\sin\theta) : 0 \le \theta \le 2\pi\} \Rightarrow$ devo trovare i minimi di $f(3\cos\theta, 3\sin\theta) = e^{-6} + 27\cos\theta\sin^2\theta =: g(\theta)$

$g'(\theta) = -27\sin^3\theta + 54\cos^2\theta\sin\theta = 27\sin\theta(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)$. $g'(\theta) = 0 \iff$ $\sin\theta = 0$ oppure $\sin^2\theta = 2\cos^2\theta$. La prima condizione $\iff \theta = 0/\pi$. La seconda si può scrivere $\sin^2\theta = 2(1-\sin^2\theta) \iff 3\sin^2\theta = 2 \iff \sin\theta = \pm\sqrt{2/3}$ da cui $\cos\theta = \pm\sqrt{1-2/3} = \pm\sqrt{1/3}$ (non occorre trovare esplicitamente θ). Mettendo questi valori in g si ritrovano i risultati di prima.

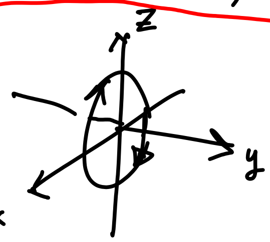
2. Si considerino gli insiemi

$$\Omega := \{4x^2 + y^2 + 4z^2 \le 4, y \ge 0\}, \qquad S := \{4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4, y \ge 0\}$$

e il campo vettoriale $\vec{f} := e^{-y^2} z\vec{\mathbf{i}} + x^2y^2z^2\vec{\mathbf{j}} + e^{-y^2} x\vec{\mathbf{k}}$.

(a) Si calcolino $\text{div}(\vec{f})$ e $\text{rot}(\vec{f})$ (0,5p.)

$\text{div}\,\vec{f} = \boxed{2x^2yz^2}$. $\text{rot}\,\vec{f} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & D_x & e^{-y^2}z \\ \vec{j} & D_y & x^2y^2z^2 \\ \vec{k} & D_z & e^{-y^2}x \end{pmatrix} = \vec{i}\left(-2ye^{-y^2}x - 2x^2y^2z\right)$
$-\vec{j}\left(e^{-y^2} - e^{-y^2}\right) + \vec{k}\left(2xy^2z^2 + 2ye^{-y^2}z\right) = \boxed{-2xy\left(e^{-y^2} + xyz\right)\vec{i} + 2yz\left(e^{-y^2} + xyz\right)\vec{k}}$



(b) Si usi il teorema di Stokes per calcolare $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$ dove $\gamma(t) = \cos(t)\vec{\mathbf{i}} + \sin(t)\vec{\mathbf{k}}$ per $0 \le \pi \le 2\pi$ (1,5p.).

Consideriamo $B = \{x^2 + z^2 \le 1, y = 0\}$. B si può vedere come superficie con normale $-\vec{j}$: in questo modo γ percorre il bordo di B coerentemente con la normale.
Applicando Stokes: $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_B \text{rot}\,\vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = -\iint_B \text{rot}\,\vec{f} \cdot \vec{j} = \boxed{0}$
perché $\text{rot}\,\vec{f}$ ha componente nulla sull'asse y

(c) Si calcoli il flusso uscente di $\vec{f}$ attraverso la frontiera di Ω (p.3).

Usiamo il teor. della divergenza: $\phi(\vec{f}, \partial\Omega) = \iiint_\Omega 2x^2yz^2\, dx\, dy$.
Possiamo scrivere $\Omega = \{x^2 + z^2 \le 1,\ 0 \le y \le 2\sqrt{1-x^2-z^2}\} \Rightarrow$

$\phi(\vec{f}, \partial\Omega) = 2\iint_{\{x^2+z^2 \le 1\}} x^2z^2\, dx\, dz \int_0^{2\sqrt{1-x^2-z^2}} y\, dy = \iint_{\{x^2+y^2 \le 1\}} x^2z^2\, 4\,(1-x^2-z^2)\, dx\, dz \; = *$

Passo in coord. polari $x = \rho\cos\theta$ $z = \rho\sin\theta$

$$(*) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho\cos\theta)^2(\rho\sin\theta)^2 4(1-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta)\,\rho\,d\rho =$$

$$4\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta\int_0^1\rho^5(1-\rho^2)\,d\rho = \int_0^{2\pi}\sin(2\theta)^2 d\theta\left[\frac{\rho^6}{6}-\frac{\rho^8}{8}\right]_0^1 =$$

$$\frac{1}{24}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4\theta)}{2}\,d\theta = \frac{2\pi}{2\cdot 2\cdot 24} = \boxed{\frac{\pi}{24}}$$

(d) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso S; su S si consideri la normale concorde con l'asse y (2p.).

È chiaro che $\partial\Omega = S \cup B$ $\quad (B = \{x^2+z^2 \le 1,\ y=0\}) \Rightarrow$

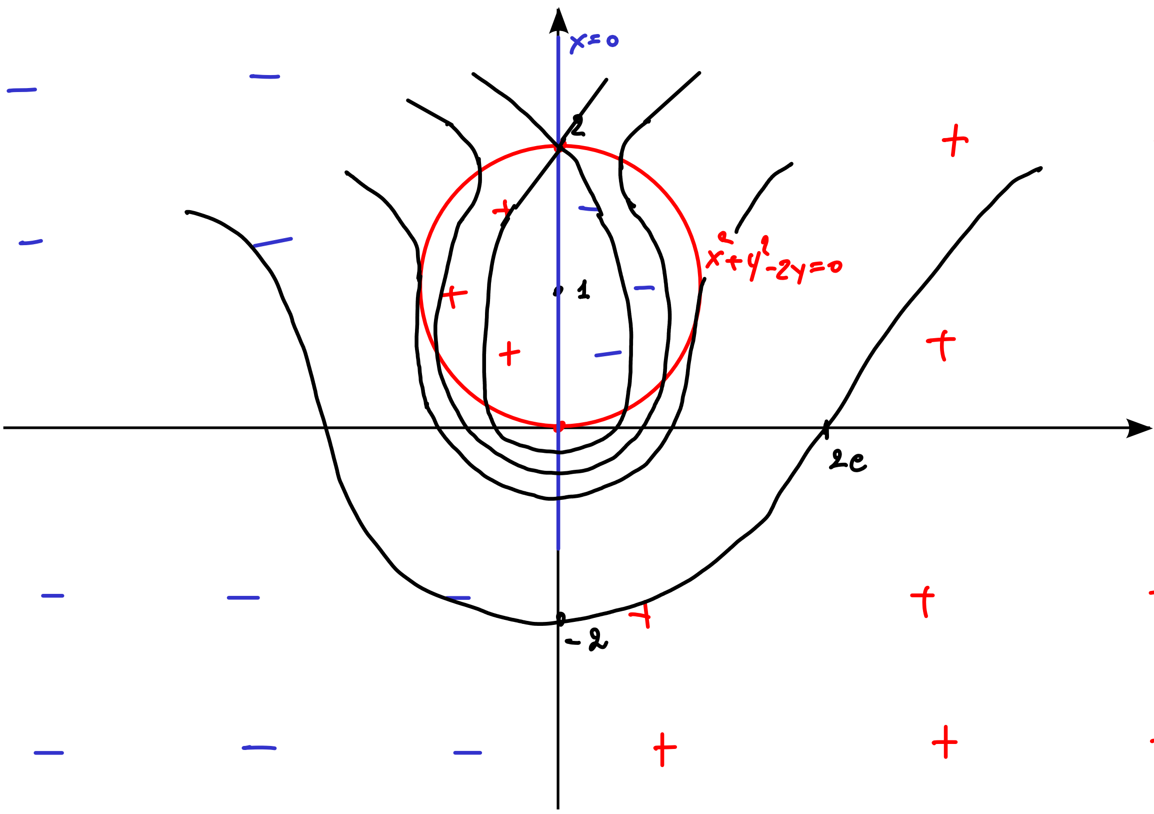
$\frac{\pi}{48} = \Phi(\vec{f},\partial\Omega) = \Phi(\vec{f},S) + \Phi(\vec{f},B)$. Calcoliamo $\Phi(\vec{f},B)$ ricordando che su B la normale è $-\vec{j}$: $\Phi(\vec{f},B) = \iint_{x^2+z^2\le 1} -f_2(x,0,z)\,dx\,dz = 0$

perché $f_2(x,0,y) = 0$. Dunque $\Phi(\vec{f},S) = \boxed{\frac{\pi}{48}}$

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2x}{x^2+y^2-2y} \qquad (=: F(x,y))$$

(a) Si trovi il dominio della funzione $F(x,y)$ e le zone del piano xy in cui F è positiva/negativa/nulla, riportandole nel diagramma sottostante. Si usino tali informazioni per tracciare un grafico qualitativo (anche parziale) delle soluzioni dell'equazione (1p.).



Il dominio di F è $x^2+y^2-2y \neq 0 \iff x^2+(y-1)^2 \neq 1$ cioè $(x,y) \notin$ circonferenza di centro $(0,1)$ raggio 1

$F(x,y)=0$ se $x=0$. Combinando i segni di $x^2+(y^2-1)-1$ e x si ricavano i segni di F come in figura

(b) Si trovi un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x,y) = \lambda(x^2+y^2)$. Si trovi poi un integrale primo (4p.).

$$\frac{\partial}{\partial y}\lambda(x^2+y^2)2x = \frac{\partial}{\partial x}\lambda(x^2+y^2)(2y-x^2-y^2) \iff$$

$$2y\,\lambda'(x^2+y^2)2x = 2x\,\lambda'(x^2+y^2)(2y-x^2-y^2) + \lambda(x^2+y^2)(-2x) \iff$$

$$4\cancel{xy}\,\lambda'(x^2+y^2) = \left(4\cancel{xy} - 2x(x^2+y^2)\right)\lambda'(x^2+y^2) - 2x\,\lambda(x^2+y^2) \iff$$

$$\cancel{2x}(x^2+y^2)\,\lambda'(x^2+y^2) = -\cancel{2x}\,\lambda(x^2+y^2) \iff \lambda'(t) = \frac{-\lambda(t)}{t} \iff \lambda(t) = \frac{c}{t} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Dunque $\boxed{\lambda(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}}$ è un fatt. integrante (prendo $c=1$). Cerco un int. primo ϕ

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\phi = \frac{2y-x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{2y}{x^2+y^2} - 1$$

. Dalla prima cond.

$\phi = \ln(x^2+y^2) + c(y)$. Derivo in $y \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} + c'(y)$. Impongo la seconda cond. $\Rightarrow c'(y) = -1 \Leftrightarrow c(y) = -y + c \quad c \in \mathbb{R}$. In definitiva:

$$\boxed{\phi(x,y) = \ln(x^2+y^2) - y} \ (+ \text{costante})$$

(c) Si tracci nel diagramma iniziale la soluzione $y(x)$ relativa al dato iniziale $(0, -2)$, e si trovino:

· il tempo $x_0 > 0$ (se esiste) per cui $y(x_0) = 0$ (1p.):

Dallo studio dei segni si vede che la soluzione $y(x)$ parte con derivata nulla: $y'(0) = 0$ ed è crescente fino a quando non incrocia la circonferenza rossa (se lo fa). Sicuramente $y(x)$ cresce fino all'asse x. Dato che $\phi(x, y(x)) = \phi(0,-2) = \ln 4 + 2 \quad \forall x$, se $y(x_0) = 0$ deve essere $\phi(x_0, 0) = \ln 4 + 2 \Leftrightarrow \ln(x_0^2) = \ln 4 + 2 \Leftrightarrow$ $x_0^2 = e^{\ln 4 + 2} = 4e^2 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2e$. Dato che $x_0 > 0$ si ha $x_0 = 2e$

NOTIAMO CHE $x_0 > 1$ per cui $y(x)$ non può incrociare mai la circonferenza rossa e dunque $y(x)$ è crescente in tutto l'intervallo massimale detto $]0, \bar{x}[$.
Ne segue che esiste $\bar{y} = \lim_{x \to \bar{x}} y(x)$.

· il tempo di esistenza massimale $\bar{x}$ e il relativo $\bar{y} := \lim_{x \to \bar{x}} y(x)$ (1p.)

Se fosse $\bar{x} < +\infty$, per i teoremi sull'intervallo massimale, sarebbe $\bar{y} = +\infty$.
Ma allora $\ln 4 + 2 = \lim_{x \to \bar{x}} \phi(x, y(x)) = \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ y \to +\infty}} \ln(x^2+y^2) - y = -\infty$ ASSURDO.
DUNQUE $\boxed{\bar{x} = +\infty}$
Dico che $\bar{y} = +\infty$. Se fosse $\bar{y} < +\infty$ avrei $\ln 4 + 2 = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to \bar{y}}} \ln(x^2+y^2) - y = +\infty$
ASSURDO e dunque $\boxed{\bar{y} = +\infty}$

(d) Si dimostri che le soluzioni dell'equazione sono pari: $y(-x) = y(x)$ (1p.).

Sia $y(x)$ una soluzione e dimostriamo che $y(-x)$ è ancora una sol.
Si ha $\frac{d}{dx} y(-x) = -y'(-x) = -\frac{-2x}{(-x)^2 + y(-x)^2 - 2y(-x)} = \frac{2x}{x^2 + y(-x)^2 - 2y(-x)}$ ← TORNA

perché y è soluzione

Inoltre in $x = 0$ le due soluzioni $y(x)$ e $y(-x)$ coincidono (perché $-0 = 0$) $\Rightarrow$
$y(x) = y(-x) \quad \forall x$, a causa del teorema di esistenza e unicità.

4. Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x(1-x)y'(x) = y(x) \quad \text{per } -1 < x < 1, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Si cerchi una soluzione tra le serie di potenze, cioè del tipo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. In particolare si trovi se una tale $y(x)$ esiste, se è unica e si trovi infine una formula esplicita per la $y(x)$ (5p.).

Sia $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Allora $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Inoltre $x(1-x)y'(x) = xy'(x) - x^2 y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n+1} =$

(cambio di indice $n+1 \to n$ nella seconda serie)

$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n$. Imponendo che valga l'equazione $\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Dato che deve essere $y(0) = 0$ abbiamo $\boxed{a_0 = 0}$ dunque tutte le serie possono partire da $n=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n a_n - (n-1) a_{n-1} - a_n \right) x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (n-1)(a_{n-1} - a_n) = 0 \quad \forall n \geq 1 \quad (R).$$

La condizione (R) non dice nulla sugli a_n se $n=1$ perché $n-1=0$. Dunque a_1 è libero. Se $n \geq 2$ si può semplificare $n-1$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} & \forall n \geq 2 \\ a_1 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\Rightarrow a_n = \alpha \ \forall n$ e quindi $y(x) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Dato che $y'(0) = a_1 = \alpha$ deve essere $\alpha = 1 \Rightarrow y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1 =$

$$\frac{1}{1-x} - 1 = \boxed{\frac{x}{1-x}}$$