COGNOME:												
NOME:												
MATR.:												

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 4 luglio 2016 - PARTE A[1]

1. Si enunci il teorema di Schwartz (sulle derivate seconde) (2p.)

Se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ha tutte le derivate parziali seconde in Ω e queste sono continue in un punto x_0, allora

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \quad i, j = 1 \dots N \qquad (\Omega \subset \mathbb{R}^N)$$

2. Data la superficie $S := \{z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ si trovi una parametrizzazione del bordo di S (3p.).

Il bordo di S è dato da $\{x^2+y^2=1, z=x^2-y^2\}$, dunque (x,y) varia sulla circonferenza e z è funzione di (x,y). Posso parametrizzare:

$x = \cos(t)$ $y = \sin(t)$ $z = x^2 - y^2 = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$ $\Rightarrow$

$\gamma(t) = \cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j} + \cos(2t)\,\vec{k}$ $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$

3. Si dica se il campo $\vec{f} := y\vec{\mathbf{i}} + z\vec{\mathbf{j}} + x\vec{\mathbf{k}}$ ammette un potenziale vettore $\vec{F}$ e in caso affermativo si trovi un possibile $\vec{F}$. (3p.).

[1] PUNTEGGIO MINIMO VotoA$\geq$5p. Voto=VotoA+VotoB ($0 \leq$ Voto ≤ 40) - Lode se Voto≥ 35

div $\vec f = \frac{\partial}{\partial x} y + \frac{\partial}{\partial y} z + \frac{\partial}{\partial z} x = 0 \Rightarrow \exists\ \vec F$ pot. vettore. Posso cercare $\vec F$ come

$\vec F = F_1 \vec i + F_2 \vec j$ $\quad (F_3 = 0)$. Allora trovo le condizioni

$$\vec f = \det\begin{pmatrix} \vec i & D_x & F_1 \\ \vec j & D_y & F_2 \\ \vec k & D_z & 0 \end{pmatrix} = -\vec i\, D_z F_2 + \vec j\, D_z F_1 + \vec k\,(D_x F_2 - D_z F_1)$$ da cui

$-F_2 = \int y\, dz \Leftrightarrow F_2 = -yz + c(x,y)$; $F_1 = \int z\, dz \Leftrightarrow F_1 = \frac{z^2}{2} + d(x,y)$

$x = D_x\left(-yz + c(x,y)\right) - D_y\left(\frac{z^2}{2} + d(x,y)\right) = D_x c(x,y) - D_y d(x,y)$

Quest'ultima cond. si può verificare in tanti modi, per es. $d = 0$ e $c = \frac{x^2}{2}$.

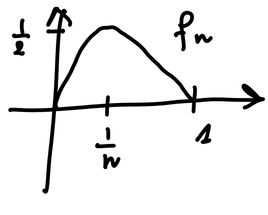
In questo modo $\vec F(x,y,z) = \frac{z^2}{2}\vec i + \left(\frac{x^2}{2} - yz\right)\vec j$ è un pot. vettore

4. Data la successione di funzioni definita da $f_n(x) := \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ per $0 \le x \le 1$, si dica se le f_n ammettono limite puntuale su $[0,1]$ (1p) e se ammettono limite uniforme su $[0,1]$ (2p.)

Se $x = 0$ $f_n(x) = 0 \to 0$; se $x \neq 0$ $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \sim \frac{1}{nx} \to 0$. Dunque f_n converge puntualmente a zero (cioè alla funzione nulla).

Se $f_n \to 0$ UNIF. allora $\max_{0\le x\le 1} |f_n(x) - 0| = \max_{0 \le x \le 1} \frac{nx}{1+n^2x^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Ma $f_n'(x) = n\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$ che si annulla in $x = \frac{1}{n}$. Allora $\max_{0\le x\le 1} \frac{nx}{1+n^2x^2} = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$



e allora $\max_{[0,1]} |f_n|$ NON TENDE A ZERO

$\Rightarrow$ f_n NON CONV. UNIF.

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ è una curva parametrizzata in lunghezza d'arco, allora γ ha norma costante.
VERO | ~~FALSO~~ (è costante $\|\gamma'(t)\|$)

(b) Sia $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ differenziabile e sia $D := \{x : G(x) \le 0\}$. Il teorema del Dini assicura che D è un dominio regolare se G non ha punti stazionari:
in D | nella chiusura di D | nella parte interna di D | ~~nella frontiera di D~~ | n.d.p.
(n.d.p. = nessuna delle precedenti. Si chiede di barrare la condizione "minimale" tra quelle che assicurano la regolarità di D).

(c) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione positiva. Se f è continua, allora f è integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}^2$. VERO | ~~FALSO~~. $f(x,y) = 1$ è continua ma ha integrale infinito

(d) Se $R > 0$ è il raggio di convergenza di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, allora la serie converge puntualmente su $]-R, R[$. ~~VERO~~ | FALSO.

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 4 luglio 2016 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x,y) := 9\ln(1+x^2+y^2) - 2xy$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (4p.).

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{18x}{1+x^2+y^2} - 2y \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{18y}{1+x^2+y^2} - 2x \xRightarrow{\text{pti staz.}} \begin{cases} y = \dfrac{9x}{1\ x^2+y^2} \\ x = \dfrac{9y}{1+x^2+y^2} \end{cases}$$

da cui $x = \dfrac{9}{1+x^2+y^2}\,\dfrac{9x}{1+x^2+y^2} \iff x=0$ oppure $\dfrac{9^2}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \iff x=0$ oppure $1+x^2+y^2 = 9$

Se $x=0 \Rightarrow y=0$. Se no trovo $\begin{cases} y=x \\ 1+x^2+y^2=9 \end{cases} \iff \begin{cases} y=x \\ 2x^2=8 \end{cases} \iff \begin{cases} y=x \\ x=\pm 2 \end{cases} \Rightarrow$ TRE PTI STAZ. $(0,0)$, $\pm(2,2)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = \frac{18(1+x^2+y^2) - 18x\cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{18(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = \frac{18(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{18x(-2y)}{(1+x^2+y^2)^2} - 2 = \frac{-36xy}{(1+x^2+y^2)^2} - 2 .$$ Vediamo gli Hessiani

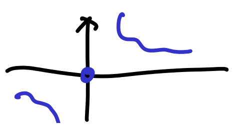
$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 18 & -2 \\ -2 & 18 \end{pmatrix} \quad \det = 18^2 - 4 > 0, \ 18>0 \Rightarrow (0,0) \text{ MINIMO REL.}$$

$$Hf(2,2) = \begin{pmatrix} \frac{18}{9^2} & -\frac{36\cdot 4}{9^2} - 2 \\ -\frac{36\cdot 4}{9^2} - 2 & \frac{18}{9^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -34 \\ -34 & 2 \end{pmatrix} \quad \det = \frac{1}{9^2}(4 - 34^2) < 0$$
$\Rightarrow \pm(2,2)$ SELLE

(*) NOTA CHE $f(0,0) = 0$, $f(1,1) = f(-1,-1) = 9\ln(9) - 8$

   (b) Si consideri l'insieme $B := \{(x,y) : f(x,y) \le 0\}$. Si dica se B è un dominio regolare (1p.)

IL PUNTO $(0,0)$ appartiene alla frontiera di B perché $f(0,0)=0$ e $\nabla f(0,0) = 0$. $\Rightarrow$ NON VALE DINI. INOLTRE $(0,0)$ è punto di minimo relativo stretto perché $Hf(0,0)$ ha autov. >0. Ne segue che in un intorno di $(0,0)$ $f(x,y)>0$ eccetto che in $(x,y)=(0,0)$. Dunque $(0,0)$ è un punto isolato di $B \Rightarrow B$ non è regolare!!

$B \rightarrow$ 

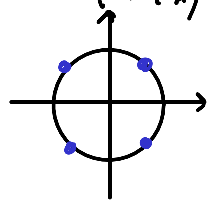
(c) Si trovi il minimo di f sul vincolo $B := \{x^2 + y^2 \leq 9\}$ (2p.)

Il minimo deve esistere per Weierstrass. Tale minimo può essere assunto in un punto interno a B, cioè in $\{x^2+y^2<9\}$ oppure sulla frontiera $\{x^2+y^2=9\}$.
Se il punto di minimo è interno deve essere stazionario, cioè uno fra $(0,0)$ e $\pm(2,2)$. Ma $\pm(2,2)$ sono selle quindi se il pto è interno $\Rightarrow \min f = f(0,0)=0$
Se invece il punto è di frontiera possiamo trovarlo mediante i moltiplicatori di L.

$$\begin{cases} \frac{18x}{1+x^2+y^2} - 2y = 2\lambda x \\ \frac{18y}{1+x^2+y^2} - 2x = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = \lambda x \\ y - x = \lambda y \\ x^2+y^2 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} (1-\lambda)x - y = 0 \\ -x + (1-\lambda) y = 0 \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$$

$\nearrow$ $x = y = 0$ (IMPOSSIBILE

$\searrow$ $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda = 0 / \lambda = 2$



SE $\lambda = 0 \Rightarrow x = y$ e $x^2+y^2=9 \iff y = x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$
SE $\lambda = 2 \Rightarrow x = -y$ e $x^2+y^2=9 \iff y = -x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$
$f\left(\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 9\ln(10) - 9$ (= minimo di f su ∂B); $f\left(\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 9\ln(10) + 9$ ($= \max_{\partial B} f$)
Dato che $f(0,0) = 0 < 9\ln(10)$ il minimo vale $\boxed{0}$

2. Si considerino gli insiemi

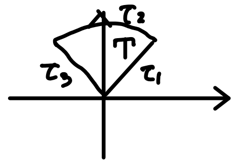
$$\Omega := \{0 \leq z \leq y^2 - x^2, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}, \qquad S := \{z = y^2 - x^2, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq |x|\}$$

e il campo vettoriale $\vec{f} := yz\vec{\mathbf{i}} - xz\vec{\mathbf{j}} + 4xyz^2\vec{\mathbf{k}}$.

(a) Si descriva Ω come insieme normale rispetto all'asse z.(1p)

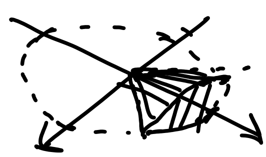
Se $(x,y,z) \in \Omega$ si ha $y^2 - x^2 \geq 0 \iff (y+x)(y-x) \geq 0$. Dato che $y \geq 0$ questo corrisponde a $(y\geq 0)$ e $(y \geq -x)$ che è come dire $y \geq |x|$. Se pongo $T = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1, y \geq |x|\}$ ho $(x,y,z) \in \Omega \Rightarrow (x,y) \in T$. È chiaro allora che $\boxed{\Omega = \{(x,y) \in T \quad 0 \leq z \leq y^2 - x^2\}}$

↑ rappresentazione di Ω in forma normale



(b) Si descriva la frontiera di Ω. (1p)

$\partial\Omega = \underbrace{\boxed{\{(x,y)\in T, \ z=0\}}}_{\text{lo chiamo } B} \cup \underbrace{\{(x,y) \in T \ ; z = y^2 - x^2\}}_{\text{è } S} \cup \underbrace{\{(x,y) \in \partial T, 0 \leq z \leq y^2 - x^2\}}_{\text{lo chiamo } C'}$



∂T è fatto di tre pezzi τ_1, τ_2 e τ_3 (vedi disegno) e su τ_1 / τ_3 $0 = z = y^2 - x^2$ dunque questi sono già in B e in S. Dunque al posto di C' posso prendere $\boxed{C = \{x^2+y^2=1, y \geq |x|, 0 \leq z \leq y^2-x^2\}}$

$\partial\Omega = B \cup S \cup C$

(c) Si calcoli il flusso uscente di $\vec f$ attraverso la frontiera di Ω ($\cancel{3}$p.). 2/3

Uso il teor. della divergenza: $\operatorname{div} \vec f = \frac{\partial}{\partial x} yz + \frac{\partial}{\partial y}(-xz) + \frac{\partial}{\partial z} 4xyz^2 = 8xyz$

$\Phi(\vec f, \partial\Omega) = \iiint_\Omega 8xyz\,dx\,dy\,dz = \iint_T 8xy\,dx\,dy \int_0^{y^2-x^2} z\,dz = 4\iint_T xy\left[z^2\right]_0^{y^2-x^2} dx\,dy =$

$4\iint_T xy(y^2-x^2)^2\,dx\,dy$. Passo in coord. polari $x=\rho\cos\theta$ $y=\rho\sin\theta$ e noto che T è descritto da $0\le\rho\le 1$ $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$.

$$\to 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^1 \rho\cos\theta\,\rho\sin\theta\left(\rho^2\sin^2\theta-\rho^2\cos^2\theta\right)^2\rho\,d\rho = 2\underbrace{\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sin 2\theta(-\cos 2\theta)^2\,d\theta}_{1}\underbrace{\int_0^1\rho^7\,d\rho}_{2} =$$

1 $= \left(\cos(2\theta)=t \quad dt=-2\sin 2\theta\,d\theta,\ \theta=\frac{\pi}{4}\to t=\cos\frac{\pi}{2}=0,\ \theta=\frac{3}{4}\pi\Rightarrow t=\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0\right)$
$= \int_0^0 -t^2\,dt = 0$

2 $= \left[\frac{\rho^8}{8}\right]_0^1 = 1/2 \quad \Rightarrow \quad$ 1 · 2 $= \boxed{0}$ $\boxed{\text{(il flusso è zero)}}$

(d) Si calcoli il flusso di $\vec f$ attraverso S; su S si consideri la normale concorde con l'asse z (3p.).

$0 = \Phi(\vec f,\partial\Omega) = \Phi(\vec f, B)+\Phi(\vec f, S)+\Phi(\vec f, C)$.

$\Phi(\vec f, B) = \iint_T f_3(x,y,0)\,dx\,dy = \iint_T 4xy0^2\,dx\,dy = 0$

$z\le y^2-x^2 = \sin^2\theta-\cos^2\theta = -\cos(2\theta)$

Parametrizzo C: $\Gamma(\theta,z) = \cos\theta\,\vec i+\sin\theta\,\vec j+z\vec k$ con $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$,

$\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta} = -\sin\theta\,\vec i+\cos\theta\,\vec j \qquad \frac{\partial}{\partial z}\Gamma = \vec k \qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}\otimes\frac{\partial\Gamma}{\partial z} = \cos\theta\,\vec i+\sin\theta\,\vec j$

$$\Phi(\vec f, C) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{3\pi/4} d\theta\int_0^{-\cos(2\theta)}\left(z\sin\theta\,\vec i - z\cos\theta\,\vec i + 4\sin\theta\cos\theta\,z^2\vec k\right)\cdot\left(\cos\theta\,\vec i+\sin\theta\,\vec j\right)dz =$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{3\pi/4} d\theta\int_0^{-\cos(2\theta)}\left(z\sin\theta\cos\theta - z\cos\theta\sin\theta\right)dz = 0$$

DUNQUE TUTTI I FLUSSI (in part. $\Phi(\vec f, S)$) fanno $\boxed{0}$

OPPURE Parametrizzo S: $\Gamma(u,v) = u\vec i+v\vec j+(v^2-u^2)\vec k$ $(u,v)\in T$
(forma cartesiana — T è quello di prima). Come noto la normale è
$2u\vec i-2v\vec j+\vec k$. Dunque
$\Phi(\vec f, S) = \iint_T \vec f(u,v,v^2-u^2)\cdot(2u\vec i-2v\vec j+\vec k)\,du\,dv =$

$$\iint_T \left[2uv(v^2-u^2) + 2uv(v^2-u^2) + 4uv(v^2-u^2)\right]^2 du\, dv = \text{(coord. polari)}$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_0^1 4\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta\,(\rho^2\sin^2\theta - \rho^2\cos^2\theta)(1+\rho^2\sin^2\theta-\cos^2\theta)\,\rho\,d\rho =$$

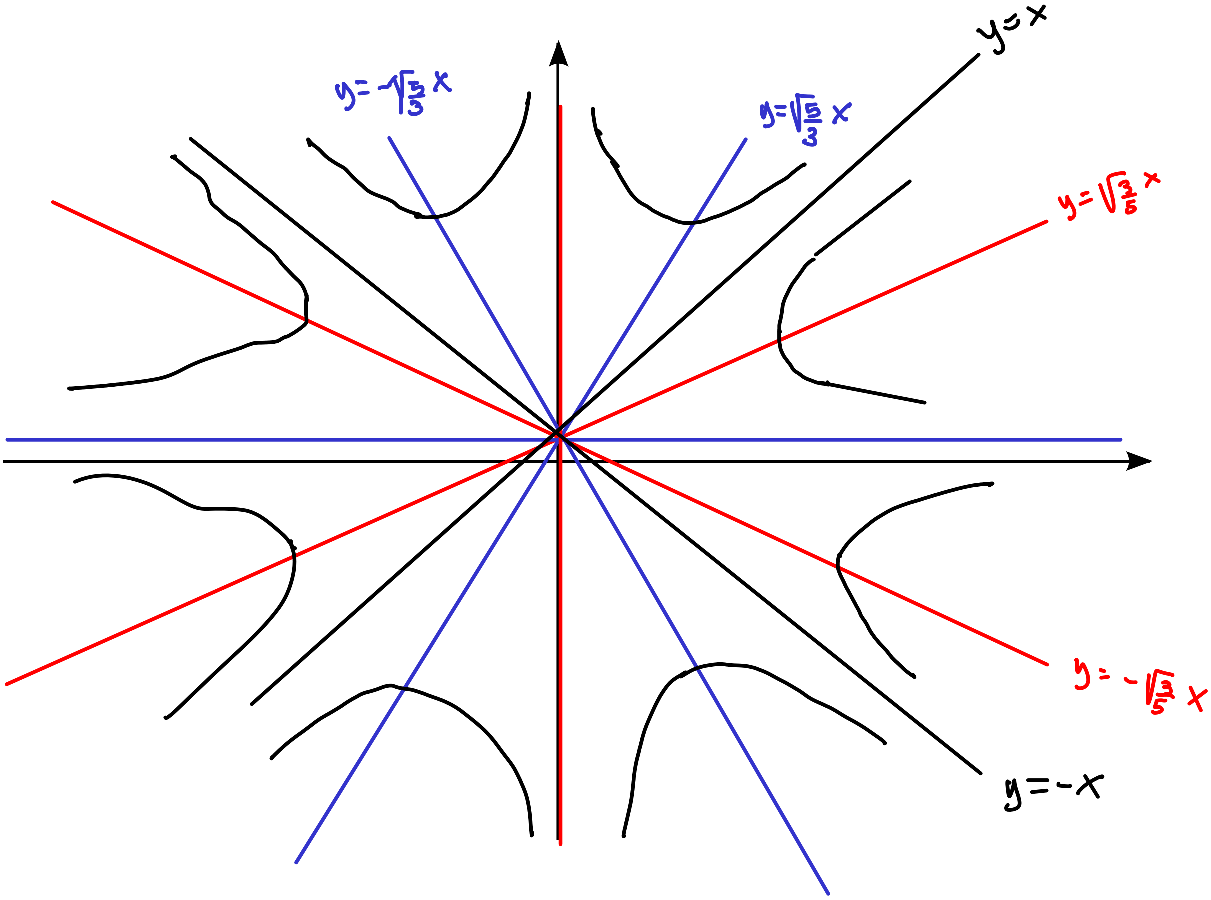
$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^1 2\sin(2\theta)(-\cos 2\theta)(1-\rho^2\cos 2\theta)\rho^5\,d\rho\,d\theta = \int_0^{3\pi/4}(-2\sin 2\theta)\cos 2\theta\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\cos 2\theta\right)d\theta = \quad (t=\cos 2\theta)$$

$$= \int_{\cos(2\frac{\pi}{4})}^{\cos(2\cdot 3\pi/4)} t\left(\frac{1}{6}-\frac{t}{8}\right)dt = \int_0^0 t\left(\frac{1}{6}-\frac{t}{8}\right)dt = 0$$

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{y(5x^2-3y^2)}{x(3x^2-5y^2)}$$

(a) Si trovi il dominio della funzione $F(x,y) := -\dfrac{y(5x^2-3y^2)}{x(3x^2-5y^2)}$ (il secondo membro dell'equazione) e le zone del piano xy in cui F è positiva/negativa/nulla, riportandole nel diagramma sottostante. Si usino tali informazioni per tracciare un grafico qualitativo (anche parziale) delle soluzioni dell'equazione (1p.).



(b) Si trovi un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x,y) = \lambda(xy)$. Si trovi poi un integrale primo (4p.).

Impongo $\dfrac{\partial}{\partial y}\lambda(xy)(5x^2y-3y^3) = \dfrac{\partial}{\partial x}\lambda(xy)(3x^3-5xy^2) \iff$

$x\lambda'(xy)(5x^2y-3y^3)+\lambda(xy)(5x^2-9y^2) = y\lambda'(xy)(3x^3-5xy^2)+\lambda(xy)(9x^2-5y^2) \iff$

$\lambda'(xy)\left(5x^3y - 3xy^3 + 5xy^3 - 3x^3y\right) = \lambda(xy)\left(9x^2 - 5y^2 - 5x^2 + 9y^2\right) \iff$

$2xy\,\lambda'(xy)\left(x^2-y^2\right) = 4\lambda(xy)\left(x^2-y^2\right) \iff \lambda'(t) = \dfrac{2\lambda(t)}{t} \iff \lambda(t) = ct^2$ con $c \in \mathbb{R}$

Dunque posso prendere $\boxed{\lambda(x,y) = x^2y^2}$. Cerco un'int. primo ϕ

$\dfrac{\partial}{\partial x}\phi = x^2y^2(5x^2y - 3y^3) = 5x^4y^3 - 3x^2y^5 \iff \phi = x^5y^3 - x^3y^5 + c(y) = x^3y^3(x^2-y^2) + c(y)$

$x^2y^2(3x^3 - 5xy^3) = \dfrac{\partial\phi}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^5y^3 - x^3y^5 + c(y)\right) = 3x^5y^2 - 5x^3y^4 + c'(y) = x^2y^2(3x^3 - 5xy^3) + c'(y)$

$\Rightarrow c' = 0$ quindi $c = \text{cost.}$ DUNQUE POSSO PRENDERE

$$\boxed{\phi(x,y) = x^3y^3(x^2-y^2)}$$

(c) Si trovi la soluzione $y(x)$ relativa al dato iniziale $(-1,1)$, e se ne riporti il grafico nel diagramma della pagina precedente (1p.)

Se parto da $(-1,1)$ trovo $\phi(-1,1) = (-1\cdot 1)^3\left((-1)^2 - (-1)^2\right) = 0$. Dunque $x^3y^3(x^2-y^2) = 0 \iff y = x$ oppure $y = -x$. Dato che devo passare da $(-1,1)$ deve essere $\boxed{y = -x}$

(d) Si tracci il grafico qualitativo della soluzione relativa al dato iniziale $(2,1)$ trovando in particolare l'intervallo di esistenza massimale $]\underline{x}, \overline{x}[$ e i limiti $\underline{y} = \lim_{x\to\underline{x}^+} y(x)$, $\overline{y} = \lim_{x\to\overline{x}^-} y(x)$(2p.).

Dato che parto tra la retta (rossa) $y = \sqrt{\frac{3}{5}}x$ e la sol costante $y = 0$ la mia sol. $y(x)$ rimane sempre in questa zona $\Rightarrow$ decresce sempre. Dato che non può toccare $y = 0$ in tempi finiti $\Rightarrow$ $\overline{x} = +\infty$.

Viceversa deve arrivare alla retta rossa in un $\underline{x} > 0$ in modo che il corrispondente $\underline{y}$ sia tale che $\underline{y} = \sqrt{\frac{3}{5}}\underline{x}$. Dato che $\phi(x,y) = \text{costante} = \phi(2,1) = 2^3(2^2-1) = 3\cdot 2^3$ la coppia $(\underline{x},\underline{y})$ deve verificare anche $(\underline{x}\,\underline{y})^3(\underline{x}^2 - \underline{y}^2) = 3\cdot 2^3$

Mettendo $\underline{y} = \sqrt{\frac{3}{5}}\underline{x}$ trovo $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}\,\underline{x}^6\left(\underline{x}^2 - \frac{3}{5}\underline{x}^2\right) = 3\cdot 2^3 \iff \underline{x}^8\,\frac{2}{5}\,\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{5}} = 3\cdot 2^3 \iff$

$\underline{x}^8 = 2^2\cdot 3^{1/2}\cdot 5^{5/2} \iff \boxed{\underline{x} = 2^{1/4}\,3^{1/16}\,5^{5/4} \text{ e } \underline{y} = \sqrt{\tfrac{3}{5}}\,\underline{x}.}$

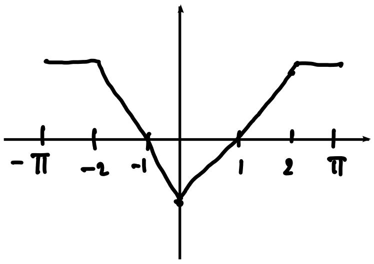
INFINE DICO CHE $\overline{y} = 0$. INFATTI SE $\overline{y} > 0$ avrei

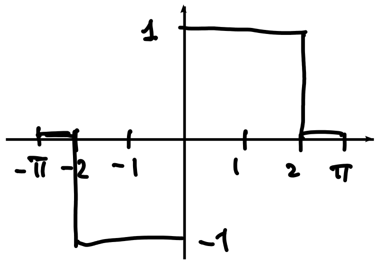
$\lim_{x\to+\infty}\phi(x,y(x)) = \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\overline{y}}}\phi(x,y) = \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to\overline{y}}} x^3y^3(x^2-y^2) = +\infty$ ASSURDO

4. Si consideri la funzione f definita su $[-\pi, \pi]$ da:

$$f(t) := \begin{cases} |t| - 1 & \text{se } |t| \leq 2, \\ 1 & \text{se } |t| \geq 2, \end{cases} \qquad \text{ed estesa tutto } \mathbb{R} \text{ in modo da essere } 2\pi \text{ periodica.}$$

(a) Si tracci il grafico su $[-\pi, \pi]$ di f ed f' (1p.).





. f f'

(b) Si trovino i coefficienti di Fourier a_n e b_n per f (4p.)

f è pari $\Rightarrow b_n = 0 \ \forall n$. $\quad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^2 (t-1)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_2^{\pi} dt =$

$\frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2} - t\right]_0^2 + \frac{1}{\pi}(\pi - 2) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{2} - 2\right) + \frac{\pi - 2}{\pi} = \frac{\pi - 2}{\pi}$

se $n \geq 1$ $\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt =$ (per parti) $\underbrace{\frac{2}{\pi}\left[\frac{f(t)\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0 \text{ per il seno}} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} f'(t)\sin(nt)\,dt$

$= -\frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin(nt)\,dt = -\frac{2}{n\pi}\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^2 =$

$\boxed{\frac{2}{n^2\pi}\left(\cos(2n) - 1\right)}$

(c) Si dica (motivando) se la serie converge uniformemente a f (1p.)

sì perché $|a_n| = \frac{2}{\pi n^2}|\cos(2n) - 1| \leq \frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2}$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è sommabile