COGNOME:

NOME:

MATR.:

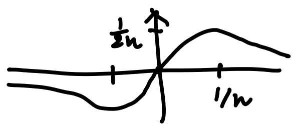
Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 13 giugno 2016 - PARTE A[1]

1. Si enunci il teorema del differenziale totale (2p.)

Se f è definita in un intorno di x_0 ($\in \mathbb{R}^n$), se esistono le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ per tutte le x di questo intorno e se $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$ sono continue in x_0, allora f è differenziabile in x_0

2. Si dica se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$ converge totalmente su $\mathbb{R}$ (3p.)

Se $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ si vede che il grafico è:



dato che $f'_n(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$

Dunque $\max_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{2n}$.

Dato che $\sum_n \frac{1}{2n} = +\infty \Rightarrow$ la serie NON CONV. TOTALMENTE

3. Si calcoli la lunghezza del grafico di $f(x) = 1 - x^2$ nell'intervallo $[0, 1]$. (3p.).

Si ha $l = l(\text{grafico}) = \int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\, dx =$

$\int_0^1 \frac{1+4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\, dx = \left[\frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(2x)\right]_0^1 + \int_0^1 x \cdot \frac{4x}{\sqrt{1+4x^2}}\, dx =$ (per parti)

$\frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(2) + \left[\, x\sqrt{1+4x^2}\,\right]_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\, dx$ DA CUI

[1] PUNTEGGIO MINIMO VotoA≥7p. Voto=VotoA+(3/5)VotoB ($0 \le$ Voto ≤ 40) - Lode se Voto≥ 35

$$l = \frac{1}{4} \operatorname{arcsinh}(2) + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

4. Si dica se il campo $\vec{f}(x,y) := \dfrac{x}{x^2+y^2}\vec{\mathbf{i}} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\vec{\mathbf{j}}$ (definito fuori dall'origine)) è conservativo (3p.).

Si tratta di un campo radiale : $\vec{f} = \varphi(\|x\|)\, x$, dove $\varphi(r) = \dfrac{1}{r^2}$.

Come noto un tale campo È CONSERVATIVO

Si vede (VOLENDO) che il potenziale F è dato da $\Phi(\|x\|)$ dove Φ è primitiva di φ , cioè, nel caso in esame $F(x,y) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\left(\Phi(r) = -\frac{1}{r} \right)$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ è una curva regolare con $\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = 0$, allora γ ha norma costante. $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

(b) Siano $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^2$ su un aperto Ω in $\mathbb{R}^3$ e $x_0 \in \Omega$ punto stazionario per f. Chiamiamo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gli autovalori della matrice Hessiana di f nel punto x_0. Se $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$, allora x_0 è sicuramente un minimo relativo per f. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\cancel{\text{FALSO}}}$. (potrebbe essere $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 > 0$)

(c) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}^2$ se e solo se $|f|$ è integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}^2$. $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(d) Se $R > 0$ è il raggio di convergenza di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, allora la serie converge uniformemente su $]-R, R[$. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\cancel{\text{FALSO}}}$.

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x,y) := e^{-xy}(1-x^2-4y^2)$.

(a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (4p.).

$$\frac{\partial}{\partial x} f = e^{-xy}\left[-y\left(1-x^2-4y^2\right) - 2x\right], \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{-xy}\left[-x\left(1-x^2-4y^2\right) - 8y\right].$$

PTI STAZ $\rightarrow \begin{cases} -y(1-x^2-4y^2) = 2x \\ -x(1-x^2-4y^2) = 8y \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{y}{2}(1-x^2-4y^2) \Rightarrow \frac{y}{2}(1-x^2-4y^2)^2 = 8y$

Dunque o $y=0$ oppure $(1-x^2-4y^2)^2 = 16 \Leftrightarrow 1-x^2-4y^2 = \pm 4$. SI VEDE CHE $1-x^2-4y^2=4$ È IMPOSS.

e allora troviamo $(0,0)$ oppure

$\begin{cases} 4y = 2x \\ 1-x^2-4y^2=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ 8y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y = \pm\frac{\sqrt{10}}{4} \end{cases}$. Calcoliamo le derivate II

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-xy}\left[y^2(1-x^2-4y^2) + 2xy + 2xy - 2\right]; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{-xy}\left[xy(1-x^2-4y^2) + 2x^2 - (1-x^2-4y^2) + 8y^2\right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{-xy}\left[x^2(1-x^2-4y^2) + 8xy + 8xy - 8\right]$$

$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$ det $H_f(0,0) = 16 - 1 = 15 > 0$, traccia $< 0 \Rightarrow$ $\underline{(0,0) \text{ MAX}}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{4}\right) = e^{-\frac{5}{4}}\left[\frac{10}{16}(-4) + 2\frac{10}{8} + 2\frac{10}{8} - 2\right] = \frac{e^{-\frac{5}{4}}}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{4}\right) = e^{-\frac{5}{4}}\left[\frac{10}{8}(-4) + 2\frac{10}{4} + 4 + 8\frac{10}{16}\right] = 9e^{-\frac{5}{4}} \Rightarrow H_f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{4}\right) = e^{-\frac{5}{4}}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 9 \\ 9 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{4}\right) = e^{-\frac{5}{4}}\left[\frac{10}{4}(-4) + 8\frac{10}{16} + 8\frac{10}{16} - 8\right] = -8e^{-\frac{5}{4}}$$

det $H_f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{4}\right) = -4 - 81 < 0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{4}\right)$ SELLA

(b) Si consideri l'insieme $B := \{(x,y) : f(x,y) \geq \frac{1}{2}\}$. Si dica se B è un dominio regolare (1p.)

Notiamo che $f(0,0) = 1$ mentre $f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{4}\right) = -4e^{-5/4}$

Dunque non ci sono punti con $\nabla f = 0$ e $f = 1/2$ $\Rightarrow$ APPLICANDO DINI SI OTTIENE CHE B è regolare.

(c) Si dica se B è limitato (1p.)

Si ha $(x,y) \in B \iff e^{-xy}(1-x^2-4y^2) \geq \frac{1}{2} \iff 1-x^2-4y^2 \geq \frac{e^{xy}}{2} \iff$ $x^2+4y^2 \leq 1 - \frac{e^{xy}}{2}$. Dato che $e^{xy} \geq 0$ questi punti verificano $x^2+4y^2 \leq 1$ cioè B è contenuto nell'ellisse $\{x^2+4y^2 \leq 1\}$. Questo mostra che <u>B è LIMITATO</u>

2. Si considerino gli insiemi

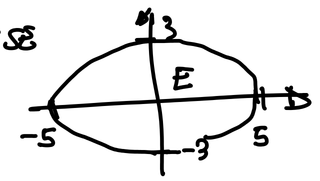
$$\Omega := \{x^2+y^2+z^2 \leq 25, 3z-4y \geq 0\}, \qquad S := \{x^2+y^2+z^2 = 25, 3z-4y \geq 0\}$$

e il campo vettoriale $\vec{f} := -(8x^3z+3y^2z^2)\vec{\mathbf{i}} + (8x^2yz - 6x^2z^2)\vec{\mathbf{j}} + (9x^2z^2 - 16x^2y^2)\vec{\mathbf{k}}$.

(a) Si descriva Ω come insieme normale rispetto all'asse z.(1p)

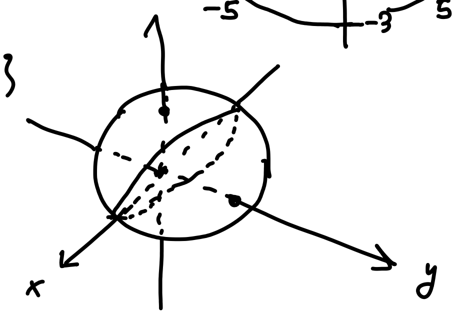
Ω è l'intersezione della palla di centro $\vec{0}$ e raggio 5 e la parte sopra il piano $3z=4y$.
Se interseco i bordi:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25 \\ z = \frac{4}{3}y \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2+\frac{16}{9}y^2 = 25 \\ z = \frac{4}{3}y \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1 \\ z = \frac{4}{3}y \end{cases} \leftarrow \text{ELLISSE}$$



DUNQUE $\Omega = \{(x,y,z) : (x,y) \in E, \ \frac{4}{3}y \leq z \leq \sqrt{25-x^2-y^2}\}$

essendo $E = \{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$



(b) Si descriva la frontiera di Ω. (1p)

$$\partial\Omega = \{x^2+y^2+z^2=25, \ z \geq \tfrac{4}{3}y\} \cup \{x^2+y^2+z^2 \leq 25, \ z = \tfrac{4}{3}y\} =$$

$$\underbrace{\{(x,y) \in E, \ z = \sqrt{25-x^2-y^2}\}}_{= S} \cup \underbrace{\{(x,y) \in E, \ z = \tfrac{4}{3}y\}}_{P}$$

(c) Si calcoli il flusso uscente di $\vec{f}$ attraverso la frontiera di Ω (4p.).

Usiamo la divergenza. Si ha: $\operatorname{div} \vec{f} = -24zx^2 + 8x^2z + 18x^2z = 2x^2z$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{f}, \partial\Omega) = \iiint_\Omega 2x^2z \, dx\,dy = \iint_E x^2 \,dx\,dy \underbrace{\int_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-x^2-y^2}} 2z\,dz}_{\left[z^2\right]_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-x^2-y^2}}} =$$

$$\iint_E x^2 dx\,dy \left(25 - x^2 - \frac{25}{9}y^2\right) = 25 \iint_E x^2\left(1 - \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9}\right) dx\,dy .$$ Cambio di coord.

$$x = 5\rho\cos\theta \quad y = 3\rho\sin\theta \qquad dx\,dy = 15\rho\, d\rho\, d\theta \Rightarrow$$

$$25\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (5\rho\cos\theta)^2(1-\rho^2)\,15\rho\, d\rho = 15\cdot 25^2 \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^3(1-\rho^2)\,d\rho =$$

$$15\cdot 25^2 \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta \int_0^1 s(1-s)\,ds = 15\cdot 25^2\,\pi \left[\frac{s^2}{2}-\frac{s^3}{3}\right]_0 =$$

$$15\cdot 25^2\cdot\frac{1}{6}\pi = \frac{5^5}{2}\pi = \frac{3125}{2}\pi$$

(d) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso S; su S si consideri la normale concorde con l'asse z (2p.).

Facciamo il flusso attraverso P. Una parametrizzazione per P è $\Gamma(u,v) = (u, v, \frac{4}{3}v)$
$(u,v)\in E$

$$\Rightarrow \vec{N} = -\frac{4}{3}\vec{j} + \vec{k} .$$

$$\Phi(\vec{f}, P) = \iint_E \vec{f}\left(u,v,\frac{4}{3}v\right)\cdot\left(\vec{k} - \frac{4}{3}\vec{j}\right) du\,dv =$$

$$\iint_E \left[-\left(8u^3\frac{4}{3}v + 3v^2\frac{16}{9}v^2\right)\vec{i} + \underbrace{\left(8u^2\frac{4}{3}v^2 - 6u^2\frac{16}{9}v^2\right)}_{=0}\vec{j} + \underbrace{\left(9u^2\frac{16}{9}v^2 - 16u^2v^2\right)}_{=0}\vec{k}\right]\cdot\left(\vec{k} - \frac{4}{3}\vec{j}\right) du\,dv =$$

$$= 0$$

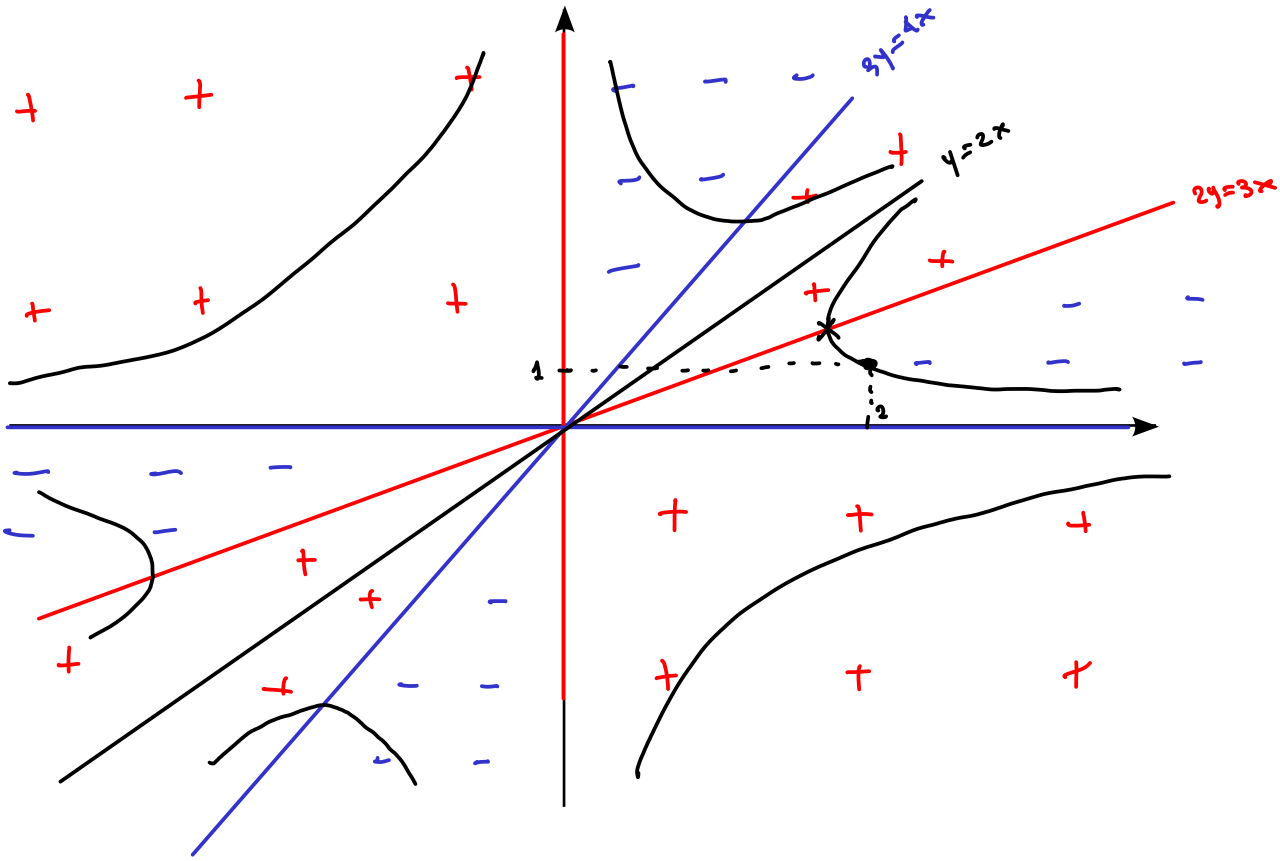
DUNQUE $\Phi(\vec{f}, S) = \Phi(\vec{f}, \partial\Omega) = \frac{5^5}{2}\pi$

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{3y^2 - 8xy}{6x^2 - 4xy}$$

(a) Si trovi il dominio della funzione $F(x,y) = \frac{2x}{2y^2-2yx^2+1}$ (il secondo membro dell'equazione) e le zone del piano xy in cui F è positiva/negativa/nulla, riportandole nel diagramma sottostante.

Si usino tali informazioni per tracciare un grafico qualitativo (anche parziale) delle soluzioni dell'equazione (1p.).



Dominio $= \{6x^2 - 4xy \neq 0\} = \{x \neq 0\} \cup \{3x \neq 2y\}$.

Sol. costante $y=0$

I segni di $F(x,y) = \dfrac{3y^2 - 8xy}{6x^2 - 4xy}$ sono rappresentati nella figura.

(b) Si trovi un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x,y) = \lambda(xy)$. Si trovi poi un integrale primo (4p.).

$$\frac{\partial}{\partial y} \lambda(xy)\left(3y^2 - 8xy\right) = \frac{\partial}{\partial x} \lambda(xy)\left(4xy - 6x^2\right) \iff$$

$$\lambda'(xy)x(3y^2 - 8xy) + \lambda(xy)(6y - 8x) = \lambda'(xy)y(4xy - 6x^2) + \lambda(xy)(4y - 12x) \iff$$

$$\lambda'(xy)(3xy^2 - 8x^2y - 4xy^2 + 6x^2y) = \lambda(xy)(4y - 12x - 6y + 8x) \iff$$

$$\lambda'(xy)xy(-2x - y) = \lambda'(xy)(-4x - 2y) \iff \lambda'(xy) = \frac{2\lambda(xy)}{xy}$$

$$\iff \boxed{\lambda(xy) = c(xy)^2} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Prendo $c = 1$ e cerco l'int. primo Φ

(A) $\dfrac{\partial}{\partial x}\Phi = 3x^2y^4 - 8x^3y^3$ (B) $\dfrac{\partial}{\partial y}\Phi = 4x^3y^3 - 6x^4y^2$

(A) $\Rightarrow$ $\phi = x^3y^4 - 2x^4y^3 + c(y)$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 4x^3y^3 - 6x^4y^2 + c'(y)$

IMPONGO (B) $\Rightarrow$ $c'(y) = 0$ $\Rightarrow$ $c(y)$ costante

$\phi(x,y) = x^3y^4 - 2x^4y^3 + c = \boxed{x^3y^3(y-2x)} + \text{costante}$

(c) Si trovi la soluzione $y(x)$ relativa al dato iniziale $(1,2)$, e se ne riporti il grafico nel diagramma della pagina precedente (1p.)

Se calcolo $\phi(1,2)$ trovo 0. Dunque la sol. che passa per $(1,2)$ verifica $x^3y^3(y-2x) = 0$ $\Rightarrow$ $y = 2x$. Dalla monotonia si ricava che $\underline{x} > 0$ e $(\underline{x}, \underline{y}) \in$ retta rossa, cioè $3\underline{x} = 2\underline{y}$. Mettendo a sistema

$\begin{cases} x^3y^3(y-2x) = -24 \\ 3x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3\left(\frac{3}{2}x\right)^3\left(-\frac{x}{2}\right) = -24 \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases} \Rightarrow x^7 = \frac{24 \cdot 2^4}{3^3} = \frac{2^7}{3^2} \Rightarrow \boxed{\underline{x} = \frac{2}{\sqrt[7]{9}}}$

e $\boxed{\underline{y} = \frac{1}{3\sqrt[7]{9}}}$. INVECE, sempre dalla monotonia $\boxed{\overline{x} = +\infty}$ e $\overline{y} \in [0,2]$. Se $\overline{y} > 0$ avrei $\phi(x,y) = x^3y^3(y-2x) \longrightarrow -\infty$ per $x \to +\infty$ IMPOSS. $\Rightarrow$ $\boxed{\overline{y} = 0}$

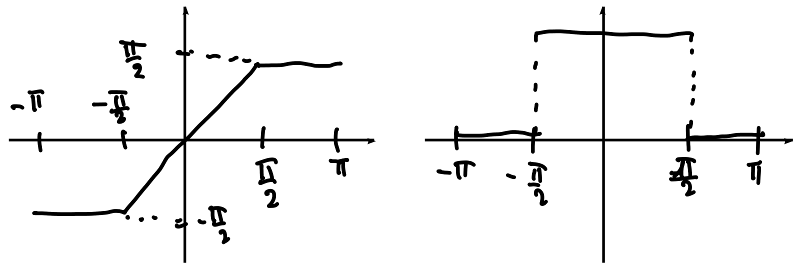
(d) Si tracci il grafico qualitativo della soluzione relativa al dato iniziale $(2,1)$ trovando in particolare l'intervallo di esistenza massimale $]\underline{x}, \overline{x}[$ e i limiti $\underline{y} = \lim_{x\to\underline{x}^+} y(x)$, $\overline{y} = \lim_{x\to\overline{x}^-} y(x)$(2p.).

$\phi(2,1) = 8 \cdot -3 = -24$ Dunque deve valere $x^3y^3(y-2x) = -24$

4. Si consideri la funzione f definita da:

$$f(t) := \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } \frac{\pi}{2} \le t \le \pi, \\ t & \text{se } -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } -\pi \le t \le -\frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \text{ed estesa tutto } \mathbb{R} \text{ in modo da essere } 2\pi \text{ periodica.}$$

(a) Si tracci il grafico su $[-\pi, \pi]$ di f ed f' (1p.).



f $\qquad\qquad\qquad$ f'

(b) Si trovino i coefficienti di Fourier a_n e b_n per f (3p.)

f è dispari $\Rightarrow$ $a_n = 0 \ \forall n$.

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \text{(per parti)}$$

$$\frac{2}{\pi}\left[f(t)\,\frac{\cos(nt)}{-n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} f'(t)\cos(nt)\,dt =$$

$$\frac{2}{\pi}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{\cos(n\pi)}{-n} - 0 + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt = -\frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n^2\pi}\Big[\sin(nt)\Big]_0^{\pi/2} =$$

$$-\frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n^2\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n\left(\frac{2}{n^2\pi} - \frac{1}{n}\right)$$

(c) Si dica (motivando) se la serie converge uniformemente a f (1p.)

NON PUÒ CONVERGERE UNIF. DATO CHE f è discontinua IN $\pi + 2k\pi$ (ricordiamo che f deve essere estesa su tutto $\mathbb{R}$ in modo 2π-periodico). Se la convergenza fosse unif. $\Rightarrow$ f continua