COGNOME:

NOME:

MATR.:

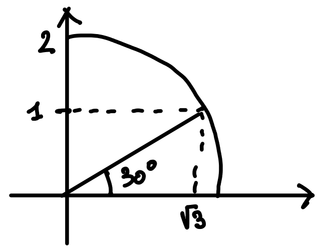
Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 3 giugno 2016 - PARTE A[1]

1. Si scriva una parametrizzazione per la superficie $S := \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, 0 \leq z \leq 1\}$ (4p.).

Si tratta di una porzione della sfera di raggio 2 con azimut tra $\psi = 60°$ e $\psi = 90°$

Posso allora prendere

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{T}(\psi, \theta) = \cos\theta \sin\psi \, \vec{i} + \sin\theta \sin\psi \, \vec{j} + \cos\psi \, \vec{k} \\ \text{con } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ \pi/3 \leq \psi \leq \pi/2 \end{array}}$$



OPPURE POSSO USARE UNA PARAMETRIZZAZIONE CARTESIANA

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{T}(x, y) = x \, \vec{i} + y \, \vec{j} + \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ \text{con } 3 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \end{array}}$$

(Basta indicarne una)

2. Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n 3^n}{1+n^2} x^n$, si dica:

(a) qual è il raggio di convergenza della serie (2p.);

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n 3^n}{1+n^2}} = \lim_{n \to \infty} 3 \sqrt[n]{\frac{n}{1+n^2}} = 3 \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{3}}$$

(b) su quale insieme la serie converge (2p.)

Per la Teoria la serie converge di sicuro su $]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$ e non converge di sicuro fuori da $[-1/3, 1/3]$. Se $x = \frac{1}{3}$ trovo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$ che diverge perché $\frac{n}{1+n^2} \geq 0$ e $\frac{n}{1+n^2} \simeq \frac{1}{n}$. Se $x = -\frac{1}{3}$ la serie converge per Leibniz.

DUNQUE $\boxed{\text{la serie converge su } [-1/3, \tfrac{1}{3}[}$

[1]PUNTEGGIO MINIMO VotoA≥5p. Voto=VotoA+VotoB (0 ≤ Voto ≤ 40) - Lode se Voto≥ 35

3. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (2 punti ciascuno)

   (a) Se un campo vettoriale $\vec{f}$ ha integrale nullo su ogni curva chiusa, allora $\vec{f}$ è irrotazionale.
   [~~VERO~~] [FALSO]

   (b) Se una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza 1, allora la serie converge per ogni x in $[-1,1]$.
   [VERO] [~~FALSO~~]

   (c) Se una funzione $f(t)$ ha come sviluppo in serie di Fourier la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^4}\sin(nt)$, quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera per f:

   [f è continua], [~~f è derivabile una volta~~], [f è derivabile due volte], (*)
   [f è derivabile tre volte], [f è derivabile quattro volte] [nessuna delle precedenti]

   Nota: è chiaro che se per esempio f fosse derivabile due volte sarebbe anche continua e derivabile. Si chiede di barrare la risposta relativa alla "massima regolarità" di cui possiamo essere sicuri.

   (d) Se $\vec{f}$ è conservativo esiste un campo $\vec{F}$ tale che rot$\vec{F} = \vec{f}$.
   [VERO] [~~FALSO~~]

(*) i coeff. di Fourier $b_n = \frac{n}{1+n^4}$ sono tali che $|n b_n| = \frac{n^2}{1+n^4} \sim \frac{1}{n^2}$

e quindi $\sum_n |n b_n| < +\infty \Rightarrow$ derivabile una volta

Se si prova con $|n^2 b_n|$ si trova una serie divergente

Ingegneria Aerospaziale, Compitino del 3 giugno 2016 - PARTE B   Cognome/Nome:

1. Si consideri l'equazione differenziale

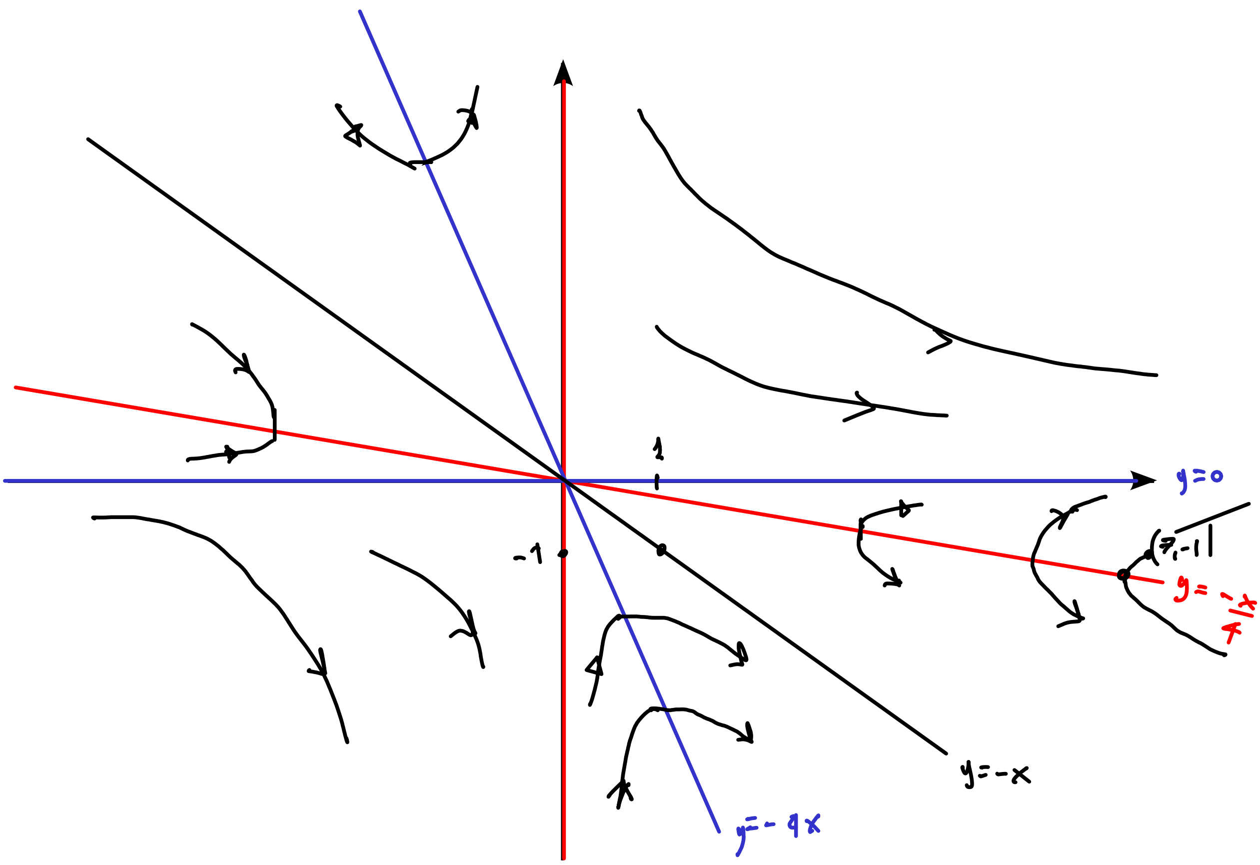
$$y' = -\frac{y}{x}\frac{4x+y}{4y+x}, \qquad y(x_0) = y_0.$$

(a) Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).

Se $F(x,y) = -\frac{y}{x}\frac{4x+y}{4y+x}$ $\Rightarrow \exists \frac{\partial F}{\partial y}$ fuori da $\{x=0\}$ e da $\{y=-\frac{x}{4}\}$. (due rette)

Dunque fuori da tale insieme vale il t. di Cauchy di esistenza locale.

$F(x,y)=0$ se $y=0$ o $y=-4y$ $\Rightarrow$ $y=0$ è sol. costante. Il segno di F si ricava combinando i segni di x, y, $4x+y$, $4y+x$ ed è mostrato di sott



(b) Si trovino un fattore integrante per l'equazione, avente la forma $\lambda(x,y) = \lambda(x+y)$ e successivamente un integrale primo (4p.).

$D_y\, \lambda(x+y)\, y(4x+y) = D_x\, \lambda(x+y)\, x(4y+x) \Leftrightarrow$

$\lambda'(x+y)(\cancel{4xy}+y^2) + \lambda(x+y)(4x+2y) = \lambda'(x+y)(\cancel{4xy}+x^2) + \lambda(x+y)(4y+2x) \Leftrightarrow$

$\lambda'(x+y)(y^2-x^2) = \lambda(x+y)(2y+2x) \Leftrightarrow \lambda'(x+y) = \frac{2\lambda(x+y)}{x+y} \Leftrightarrow$

$\boxed{\lambda(x+y)=c(x+y)^2}$. Prendo $c=1$. Cerco un potenziale ϕ:

(A) $\frac{\partial}{\partial y}\phi = y(4x+y)(x+y)^2$ (B) $D_y\phi = x(4y+x)(x+y)^2$

(A)$\Rightarrow$ $\phi(x,y) = y\int(4x+y)(x+y)^2\,dx = $ (per parti) $y\left\{(4x+y)\frac{(x+y)^3}{3} - 4\int\frac{(x+y)^3}{3}dx\right\} =$

$$y\left\{(4x+y)\frac{(x+y)^3}{3} - \frac{(x+y)^4}{3}\right\} = y\frac{(x+y)^3}{3}\left\{4x+y-x-y\right\} = xy(x+y)^3 + c(y)$$

Se derivo in y $\Rightarrow$ $\frac{\partial\phi}{\partial y} = x(x+y)^3 + 3xy(x+y)^2 + c'(y) = (x+y)^2\{x(x+y)+3xy\}+c'(y)$

$(x+y)^2\{x^2+4xy\}+c'(y) = x(x+4y)(x+y)^2 + c'(y)$. Usando (B) $\rightarrow$ $c'=0 \Rightarrow c=$cost.

DUNQUE $\boxed{\phi(x,y) = xy(x+y)^3}$ + costante

Ricordiamo che, se $y(x)$ risolve l'equazione, allora

$\phi(x,y(x))$ è costante

(c) Si trovi un'espressione per la soluzione che parte da $(1,-1)$ e se ne tracci il grafico (1p.).

Se y è la soluzione $\Rightarrow$ $\phi(x,y) = \phi(1,-1) = -1(1-1)^3 = 0$. Quindi

$xy(x+y)^3=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{y=-x}$

(d) Si tracci il grafico della soluzione che parte da $(7,-1)$ individuando l'intervallo massimale di esistenza e i limiti di $y(x)$ agli estremi di tale intervallo (2p.).

Se y è sol. $\Rightarrow$ $xy(x+y)^3 = -7\cdot 6^3$. Dato che $(7,-1)$ è tra la sol. costante e la retta $y=-\frac{x}{4}$ $\Rightarrow$ $y(x)$ rimane in questa zona fino a che esiste, ed è crescente. Dato che non può mai toccare l'asse delle x $\Rightarrow$ il tempo massimale a destra è $\boxed{+\infty}$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \bar y \le 0$. Se fosse $\bar y<0$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to+\infty}\phi(x,y(x)) = +\infty\,\bar y\,(+\infty+\bar y)^3 = +0$ IMPOSSIBILE $\Rightarrow$ $\boxed{\bar y=+\infty}$. Andando all'indietro è chiaro che $(x,y(x))\to(\underline{x},\underline{y})$ con $(\underline{x},\underline{y})\in\{4y+x=0\}$. Mettendo a sistema con la condiz. $\phi(\underline{x},\underline{y}) = -7\cdot 6^3$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x=-4y \\ (-4y)y(-4y+y)^3 = 7\cdot 6^3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4y \\ -4\cdot 3^3 y^5 = 7\cdot 6^3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4y \\ y^5 = -7\cdot 2\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix}\bar y = -\sqrt[5]{14} \\ \bar x = 4\sqrt[5]{14}\end{matrix}}$$

2. Siano $\vec{f}(x,y,z) := (x^3+z^3)\vec{\mathbf{i}} + y^2z\vec{\mathbf{j}} + (3y^2z - yz^2 + 3xy^2)\vec{\mathbf{k}}$ e $\Omega := \{2z \le 3 - x^2 - y^2, x+z \ge 0\}$.

(a) Si scriva Ω come insieme normale rispetto all'asse z. (1p.)

Dalla def. di $\Omega \Rightarrow 3 \geq x^2+y^2-2x \Leftrightarrow 3 \geq (x-1)^2 - 1 + y^2 \Leftrightarrow 4 \geq (x-1)^2 + y^2$. DUNQUE SE $(x,y,z) \in \Omega \Rightarrow (x,y) \in B = \{(x-1)^2+y^2 \le 4\}$ (CERCHIO DI CENTRO (1,0) e RAGGIO 2)

Ω è descritto allora da:

$$\boxed{\left\{ (x,y,z) : (x,y) \in B \quad \text{e} \quad -x \le z \le \frac{3-x^2-y^2}{2} \right\}}$$

(b) Si descriva $\partial\Omega$ (la frontiera di Ω). (1p.)

$\partial\Omega = P \cup S$ dove $P = \{(x,y) \in B,\ z = -x\}$

$S = \{(x,y) \in B,\ 2z = 3 - x^2 - y^2\}$ ← quello del punto successivo.

(B è quello di sopra)

(c) Si calcoli il flusso uscente di $\vec{f}$ attraverso $\partial\Omega$ (4p.).

Conviene usare la divergenza. Si ha $\operatorname{div}\vec{f} = 3x^2 + \cancel{2yz} + 3y^2 - \cancel{2yz} = 3(x^2+y^2)$

Allora $\phi(\vec{f}, \partial\Omega) = \iiint_\Omega 3(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iint_B 3(x^2+y^2)\,dx\,dy \int_{-x}^{\frac{3-x^2-y^2}{2}} dz =$

$\iint_B 3(x^2+y^2)\left(\frac{3-x^2-y^2}{2} + x\right)dx\,dy = \frac{3}{2}\iint_B (x^2+y^2)(4-(x-1)^2-y^2)\,dx\,dy$

Uso coord. polari in B: $x = 1 + \rho\cos\theta \quad y = \rho\sin\theta \quad dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta \Rightarrow$

$\frac{3}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left[(1+\rho\cos\theta)^2 + \rho^2\sin^2\theta\right]\left[4 - \rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\rho\right]\rho\,d\rho =$

$\frac{3}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (1 + 2\rho\cos\theta + \rho^2)(4-\rho^2)\rho\,d\rho = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (1+\rho^2)(4-\rho^2)\rho\,d\rho +$

$3\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\theta}_{=0} \int \rho^2(4-\rho^2)\,d\rho = \frac{3}{2}\cdot 2\pi \cdot \int_0^4 (1+s)(4-s)\frac{ds}{2} = \frac{3\pi}{2}\int_0^4 (4+3s-s^2)\,ds =$ $s=\rho^2$

$\frac{3\pi}{2}\left[4s + \frac{3}{2}s^2 - \frac{s^3}{3}\right]_0^4 = \frac{3}{2}\pi\left(16 + \frac{3}{2}\cdot 16 - \frac{16\cdot 4}{3}\right) = \pi\left(8\cdot 3 + 9\cdot 4 - 16\cdot 2\right) =$

$\pi(24+36-32) = \boxed{28\pi}$

NOTIAMO CHE $28\pi = \phi(\vec{f}, \partial\Omega) = \phi(\vec{f}, P) + \Phi(f, S)$ (*)

(dove in P la normale punta verso il basso

(d) Si calcoli il flusso di $\vec f$ attraverso S, dove $S := \{2z = 3 - x^2 - y^2, x + z \geq 0\}$ e dove si sceglie la normale a S in modo concorde con l'asse z. (3p.).

Conviene calcolare il flusso attraverso P, P è descritto da $\Gamma(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} - x\vec{k}$, $(x,y) \in B$ e dunque (con questa Γ) la normale è $-\vec{i} - \vec{k}$. Allora

$$\Phi(\vec f, P) = \iint_B \vec f(x,y,-x)\cdot(-\vec i - \vec k)\,dx\,dy =$$

$$\iint_B \Big\{-\underbrace{(x^3+(-x)^3)}_{=0} - (3\cancel{y^2(-x)}) - y(x)^2 + \cancel{3xy^2})\Big\}\,dx\,dy = \iint_B -yx^2\,dx\,dy =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (-\rho\sin\theta)(1+\rho\cos\theta)^2\rho\,d\rho = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^2\sin\theta\,(1+2\rho\cos\theta+\rho^2\cos^2\theta)\,d\rho =$$

$$-\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta}_{=0}\int_0^2\rho^2\,d\rho - \underbrace{\int_0^{2\pi} 2\sin\theta\cos\theta}_{=\int_0^{2\pi}\sin 2\theta\,d\theta = 0}\int_0^2\rho^3\,d\rho - \int_0^{2\pi}\sin\theta\cos^2\theta\int_0^2\rho^4\,d\rho =$$

$$= +\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\theta}\frac{\cos^3(\theta)}{3}\,d\theta\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2 = \underbrace{\left[\frac{\cos^3(\theta)}{3}\right]_0^{2\pi}}_{=0}\frac{32}{5} = 0$$

Da $(*)$

$$\Phi(\vec f, S) = \Phi(\vec f, \partial\Omega) - \Phi(\vec f, P) = 28\pi - 0 = \boxed{28\pi}$$

(e) Si dica se $\vec f$ ammette un potenziale vettore $\vec F$ (1p.).

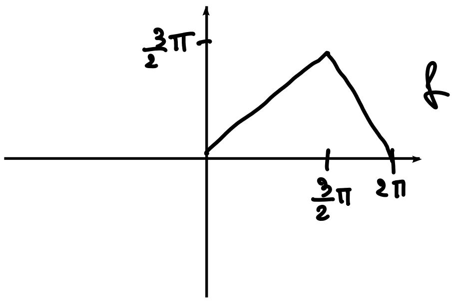
NO! La divergenza di $\vec f$ non è zero

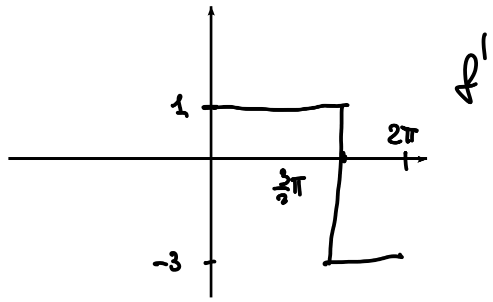
3. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) := \begin{cases} t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}, \\ 6\pi - 3t & \text{se } \frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi, \end{cases}$$

estesa fuori $[0, 2\pi]$ in modo da essere 2π-periodica.

(a) Si traccino i grafici di f e f' su $[0, 2\pi]$ (1p.).





(b) Si calcolino i coefficienti della serie di Fourier di f (4p.).

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\left(2\pi\cdot\frac{3}{2}\pi\right)}{2} = \boxed{\frac{3}{4}\pi}$$ area del triangolo !!

$$n\geq 1 \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = (\text{per parti}) = \frac{1}{\pi}\underbrace{\left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{2\pi}}_{=0 \text{ per il seno} \dots} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)\,dt$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\sin(nt)\,dt + \frac{3}{n\pi}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\sin(nt)\,dt = -\frac{1}{n\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{-n}\right]_0^{\frac{3}{2}\pi} + \frac{3}{n\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{-n}\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} =$$

$$\frac{1}{n^2\pi}\left(\cos\left(\frac{3}{2}n\pi\right)-1\right) - \frac{3}{n^2\pi}\left(1-\cos\left(\frac{3}{2}n\pi\right)\right) = \boxed{\frac{4}{n^2\pi}\left(1-\cos\left(\frac{3}{2}n\pi\right)\right)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\underbrace{\left[f(t)\frac{\cos(nt)}{-n}\right]_0^{2\pi}}_{=0 \ (f=0 \text{ in } 0 \text{ e } 2\pi)} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\cos(nt)\,dt =$$

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos(nt)\,dt - \frac{3}{n\pi}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\cos(nt)\,dt =$$

$$\frac{1}{n\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\frac{3}{2}\pi} - \frac{3}{n\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} = \boxed{\frac{4}{n^2\pi}\sin\left(\frac{3}{2}n\pi\right)}$$

(c) Si dica se la serie di Fourier trovata sopra converge uniformemente a f (1p.).

SI PERCHÉ $|a_n| \simeq \frac{1}{n^2}$ e $|b_n| \simeq \frac{1}{n^2}$