COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 26 febbraio 2016 - PARTE A[1]

1. Scrivere l'enunciato del teorema del differenziale totale (p.4)

2. Si calcoli la lunghezza della curva $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = t\cos(t)\vec{\mathbf{i}} + t\sin(t) + t^2\vec{\mathbf{k}}$ (4p.)

   Può essere utile la formula $\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsinh}(x) + x\sqrt{1+x^2}\right) + c$.

$$\gamma'(t) = (\cos(t) - t\sin(t))\vec{i} + (\sin(t) + t\cos(t))\vec{j} + 2t\vec{k}$$

$$\|\gamma'(t)\|^2 = (\cos(t) - t\sin(t))^2 + (\sin(t) + t\cos(t))^2 + 4t^2 =$$

$$\cos^2(t) - 2t\cancel{\sin(t)\cos(t)} + t^2\sin^2(t) + \sin^2(t) + 2t\cancel{\sin(t)\cos(t)} + t^2\cos^2(t) + 4t^2$$

$$= 1 + t^2 + 4t^2 = 1 + 5t^2.$$ DUNQUE

$$\ell(\gamma) = \int_0^{\pi} \sqrt{1+5t^2}\,dt = \left(x = \sqrt{5}t \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\int_0^{\sqrt{5}\pi} \sqrt{1+x^2}\,dx =$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{5}}{10}\operatorname{settsinh}(\sqrt{5}\pi) + \frac{\pi}{2}\sqrt{1+5\pi^2}}$$

[1] PUNTEGGIO MINIMO VotoA$\geq$5p. Voto=VotoA+VotoB ($0 \leq$ Voto ≤ 40) - Lode se Voto≥ 35

3. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (2 punti ciascuno)

   (a) L'insieme $M := \{(x, y, z) : 0 \le z \le x^2 + y^2, x^2 + y^2 < 4\}$ è
   $\boxed{\text{limitato e chiuso}}$ $\boxed{\text{limitato ma non chiuso}}$ $\boxed{\text{chiuso ma non limitato}}$ $\boxed{\text{né limitato né chiuso}}$

   (b) Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ è una curva regolare, derivabile due volte e se $\|\gamma(t)\| = 1$ per ogni t di $[a, b]$, allora $\gamma''(t)$ è sempre perpendicolare a $\gamma'(t)$.
   $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

   (c) Sia f una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ definita in un intorno di un punto x_0 e supponiamo che x_0 sia punto di massimo relativo per f. Indichiamo con H la matrice Hessiana fi f in x_0. Allora:

$$\boxed{H \text{ ha tutti autovalori } > 0}, \quad \boxed{H \text{ ha tutti autovalori } < 0}, \quad \boxed{H \text{ è diagonale}},$$
$$\boxed{\text{gli autovettori di } H \text{ formano una base ortogonale per } \mathbb{R}^3}, \quad \boxed{\text{nessuna delle precedenti}}$$

   (d) Sia $f : B(0, 1) \to \mathbb{R}$ continua con f integrabile in senso improprio su $B(0, 1)$ ($B(0, 1)$ è il disco aperto $\{x^2 + y^2 < 1\}$). Allora $|f|$ è integrabile in senso improprio su $B(0, 1)$. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) := 2x^2 + y^4 - 2xy$ e definiamo $M := \{(x, y) : f(x, y) \leq 17/16\}$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (6p.).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 2x \Rightarrow \text{(pti staz.)} \begin{cases} y = 2x \\ x = 2y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 16x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 0 \ / \ 1 = 16x^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 3 pti staz. $(0,0)$, $\pm\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

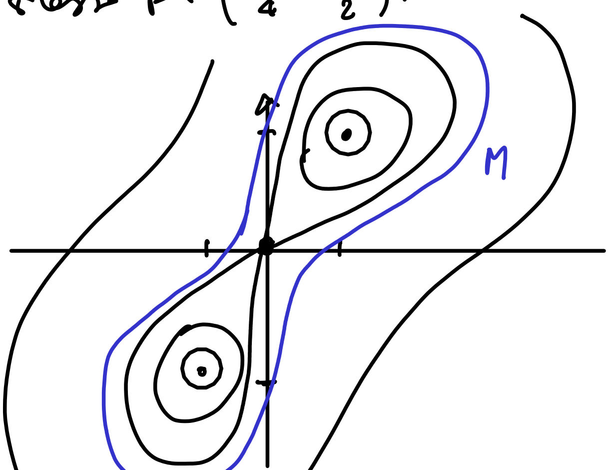
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$$

Calcolo gli Hessiani nei pti staz.

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det = -4 < 0 \Rightarrow (0,0) \text{ pto di sella}$$

$$H_f\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det = 12 - 4 > 0, \ 4 > 0 \Rightarrow \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right) \text{ pto di minimo rel.}$$

le stesso per $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$.



← PLAUSIBILI LINEE DI LIVELLO

perchè $xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$

$\downarrow$

   (b) Si dica se M è limitato. (2p)

Dico che $\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = +\infty$. Infatti $f(x,y) \geq 2x^2 + y^4 - (x^2 + y^2) = x^2 + y^4 - y^2$

se $\|(x,y)\| \to \infty$ almeno uno tra $|x|$ e $|y|$ diverge $\Rightarrow x^2 \to +\infty$ oppure $y^4 - y^2 \to +\infty$

Ne segue che $f(x,y) \to +\infty$. DA QUESTO SI RICAVA CHE M È LIMITATO

(perchè $\exists R > 0$ ~~t.c.~~ che $\forall (x,y)$ con $\|(x,y)\| \geq R$ si ha $f(x,y) \geq \frac{17}{16}$ e dunque $M \subset B(0,R)$)

(c) Si dica se M è un dominio regolare. (2p.)

Basta notare che $M = \{ f(x,y) \le \frac{17}{16} \}$ e che nelle (x,y) in cui $f(x,y) = \frac{17}{16}$ il gradiente di f non è nullo: infatti gli unici pti in cui $\nabla f = 0$ sono $(0,0)$ e $\pm(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ e si ha

$$f(0,0) = 0 \ne \frac{17}{16} \qquad f(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}) = f(-\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{2}) = \frac{2}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = \frac{2+1-2}{16} = \frac{1}{16} \ne \frac{17}{16}$$

(LA TESI SEGUE ALLORA PER IL T. DEL DINI)

(d) Si dica se la funzione $g(x,y) := -2x + y$ ammette massimo/minimo su M e in caso affermativo li si calcoli (7p.).

MAX/MIN esistono perché g è continua e M è limitato e chiuso.
I pti di max/min devono essere pti stazionari di g interni a M, ma non ne esistono perché $\nabla g = \binom{-2}{1} \ne \binom{0}{0}$, oppure stazionari vincolati su ∂M.
Questi ultimi verificano $\nabla g = \lambda \nabla f$ e $f = \frac{17}{16}$ cioè

$$\begin{cases} -2 = \lambda(4x-2y) \\ 1 = \lambda(4y^3-2x) \\ 2x^2+y^4-2xy = \frac{17}{16} \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = \lambda(y-2x) \\ 1 = \lambda(4y^3-2x) \\ 2x^2+y^4-2xy = \frac{17}{16} \end{cases} \Rightarrow y-2x = 4y^3-2x \iff y = 4y^3$$

$$\Updownarrow$$

$$y=0 \text{ oppure } y = \pm\frac{1}{2}$$

se $y=0$ dalla terza:

$$2x^2 = \frac{17}{16} \iff x = \pm\frac{\sqrt{34}}{8}$$

se $y = 1/2$

$$2x^2+\frac{1}{16}-x-\frac{17}{16}=0 \iff 2x^2-x-1=0 \iff x=1 \text{ o } x=-\frac{1}{2}$$

se $y=-1/2$

$$2x^2+\frac{1}{16}+x-\frac{17}{16}=0 \iff 2x^2+x-1=0 \iff x=-1 \text{ o } x=1/2$$

DEVO CALCOLARE g su tutti questi punti

$$g(\pm\tfrac{\sqrt{34}}{8},0) = \mp\frac{\sqrt{34}}{4}$$

$$g(1,\tfrac{1}{2}) = -2+\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \qquad g(-1,-1/2) = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$g(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = \frac{2}{2}+\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad g(1/2,-1/2) = -\frac{2}{2}-\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

DATO CHE $\frac{\sqrt{34}}{4} < \frac{3}{2} \iff \frac{\sqrt{34}}{2} < 3 \iff \sqrt{34} < 6 \iff 34 < 36$ si ha

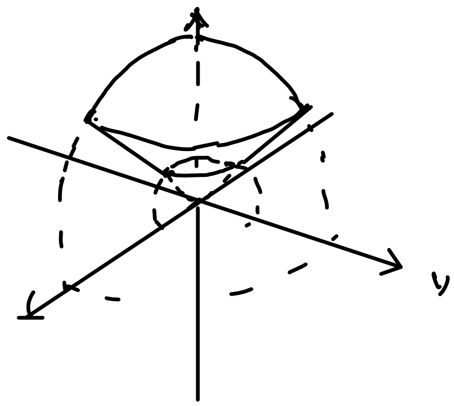
$$\boxed{\min_M g = -\frac{3}{2}} \qquad \boxed{\max_M g = \frac{3}{2}}$$

2. Si calcoli l'integrale:

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{xy}{z}\, dxdydz$$

$z \geq 0$

dove $B = \{(x, y, z) : z^2 \geq x^2 + y^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$.(7p.)



Passo in coordinate sferiche

$x = \rho \cos\theta \sin\psi \qquad 1 \leq \rho \leq 2$

$y = \rho \sin\theta \sin\psi \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}$

$z = \rho \cos\psi$

$dxdydz = \rho^2 \sin\psi\, d\rho\, d\theta\, d\psi$

$$\text{INT.} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/4} d\psi \int_1^2 \frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta \sin^2\psi}{\rho\cos\psi}\, \rho^2 \sin\psi\, d\rho$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2\psi}{\cos\psi} \sin\psi\, d\psi \int_1^2 \rho^3\, d\rho =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\psi = s \\ -\sin\psi\, d\psi = ds \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\, d\theta \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{1-s^2}{s}(-1)\, ds \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} \int_{\sqrt{2}/2}^1 \left(\frac{1}{s} - s\right) ds\ \frac{16-1}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{-1-1}{2}\right)\left[\ln s - \frac{s^2}{2}\right]_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{15}{4} =$$

$$\frac{1}{2}\left(-\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\frac{15}{4} = \frac{15}{8}\left(\ln\sqrt{2} - \frac{1}{4}\right)$$