COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 23 febbraio 2016 - PARTE A[1]

1. Dato $A \subset \mathbb{R}^N$ e un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ di scriva la definizione di punto di accumulazione per A (2p.)

Per ogni intorno U di x_0 esiste un punto x con $x \neq x_0$ e $x \in A$

2. Si dica (giustificando) se l'insieme $\Omega := \{(x, y) : x^2 + y^4 \leq 1\}$ è un dominio regolare (3p.)

Posto $G(x,y) = x^2 + y^4 - 1$ si ha $\Omega = \{G(x,y) \leq 0\}$. Calcoliamo $\frac{\partial G}{\partial x} = 2x$ $\frac{\partial G}{\partial y} = 4y^3$. Se un punto $(x,y) \in \{G(x,y) = 0\}$, cioè se $x^2 + y^4 = 1$ non possono essere nulle entrambe $\frac{\partial G}{\partial x}$ e $\frac{\partial G}{\partial y}$

DUNQUE Ω e' un dominio regolare

3. Si calcoli la lunghezza del grafico di $f(x) = e^x$ nell'intervallo $[0, 1]$. (3p.).

Devo calcolare $\int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$. Pongo $s = \sqrt{1+e^{2x}}$ $\Leftrightarrow e^{2x} = s^2 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln(s^2 - 1)$ da cui $dx = \frac{1}{2} \frac{2s}{s^2-1} ds$ e l'int. diventa

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{s \cdot s}{s^2 - 1} ds = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \left(1 + \frac{1}{s^2-1}\right) ds = \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right) \frac{ds}{2} =$$

$$\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{s-1}{s+1}\right|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} = \sqrt{1+e^2} + \frac{1}{2} \ln \sqrt{1+e^2} - 1 - \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} - 1)\right)$$

[1] PUNTEGGIO MINIMO VotoA$\geq$7p. Voto=VotoA+(3/5)VotoB ($0 \leq$ Voto ≤ 40) - Lode se Voto≥ 35

4. Si dica se il campo (bidimensionale) $\vec{f}(x,y) := \frac{y}{x^2+y^2}\vec{\mathbf{i}} - \frac{x}{x^2+y^2}\vec{\mathbf{j}}$ è irrotazionale (2p.) e se è conservativo (2p.).

$\frac{\partial}{\partial y} f_1 = \frac{x^2+y^2-y2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial}{\partial x} f_2 = -\frac{x^2+y^2-x2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ COINCIDONO $\Rightarrow$ $\vec{f}$ è IRROTAZIONALE

Considero $\gamma(t) = R\cos(t)\,\vec{i} + R\sin(t)\,\vec{j}$ $0 \le t \le 2\pi$ ($R>0$ qualunque). Allora

$\gamma'(t) = -R\sin(t)\,\vec{i} + R\cos(t)\,\vec{j}$ e

$\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(R\cos t, R\sin t)\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\left(\frac{(R\sin t)(-R\sin t)}{R^2} + \frac{(-R\cos t)(R\cos t)}{R^2}\right)dt$

$= \int_0^{2\pi}(-1)\,dt = -2\pi \neq 0$ $\vec{f}$ NON È CONSERVATIVO

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) L'insieme $M := \{(x,y) : xy = 1\}$ è

[limitato e chiuso] [limitato ma non chiuso] [chiuso ma non limitato] [né limitato né chiuso]

(b) Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ è una curva regolare, allora $\gamma''(t)$ è sempre perpendicolare a $\gamma'(t)$.

[VERO] [FALSO]

(c) Sia f una funzione definita in un intorno di un punto x_0. Se f è differenziabile in x_0 allora f ammette derivate direzionali lungo una qualunqe direzione di $\mathbb{R}^3$. [VERO] [FALSO]

(d) La serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^n}$ è convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e la sua somma definisce una funzione infinitamente derivabile. [VERO] [FALSO]

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) := 4x^2 + y^2 - 4e^{xy-1}$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (4p.).

$\frac{\partial}{\partial x} f = 8x - 4y e^{xy-1}$; $\frac{\partial}{\partial y} f = 2y - 4x e^{xy-1}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} 2x = y e^{xy-1} \\ y = 2x e^{xy-1} \end{cases}$ $\Rightarrow$

$2x = 2x (e^{xy-1})^2$ $\Leftrightarrow$ $x=0$ oppure $e^{xy-1} = 1$ da cui $x=0$ oppure $xy = 1$

Se $x=0$ trovo $y=0$. Nell'altro caso $\begin{cases} 2x = y \\ xy = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y = 2x \\ 2x^2 = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{matrix} x = \pm\sqrt{2}/2 \\ y = 2x \end{matrix}$

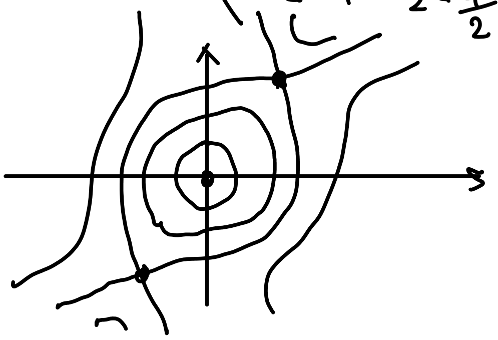
$\rightarrow$ TRE PTI STAZIONARI $(0,0)$, $\pm(\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8 - 4y^2 e^{xy-1}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 - 4x^2 e^{xy-1}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4xy e^{xy-1} - 4e^{xy-1}$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & -4e^{-1} \\ -4e^{-1} & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det = 16 - 16e^{-2} > 0$. $8 > 0 \Rightarrow$ MINIMO

$Hf(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 8 - 4 \cdot 2 & -4-4 \\ -4-4 & 2 - \frac{4}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\det < 0$ SELLA

(lo stesso in $-(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$)



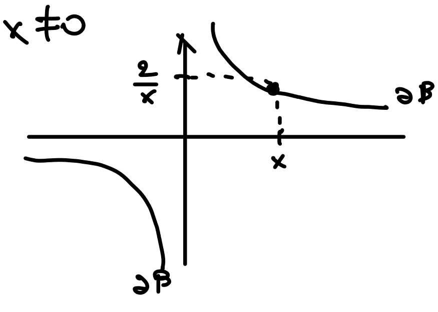
(LINEE DI LIVELLO)

   (b) Si consideri il dominio $B := \{(x, y) : xy \le 2\}$. Si dica se f ammette massimo/minimo su B e in caso affermativo li si calcoli (5p.).

Devo cercare gli eventuali punti stazionari su $\partial B = \{xy = 2\}$ $xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x}$ in f:
Un modo possibile è inserire la condizione
$\varphi(x) = f(x, \frac{2}{x}) = 4x^2 + \frac{4}{x^2} - 4e$ definita per $x \neq 0$

$\varphi(0) = +\infty$ $\varphi(\infty) = \infty$ $\varphi'(x) = 8x - \frac{8}{x^3}$

$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ che corrisponde a un MINIMO
su ∂B ($\nexists$ max perché $\varphi \to +\infty$ quando $x \to \pm\infty$)



DUNQUE $\nexists \max_B f$, PUÒ ESISTERE $\min_B f$ e se esiste è assunto o in $(0,0)$ o in $(1,2)$. Dato che, sulle $(x,y)\in B$, si ha $f(x,y) \geq 4x^2+y^2-4e$ si ha $\lim_{\substack{\|P\|\to\infty \\ P\in B}} f(P) = +\infty \Rightarrow$ IL MINIMO ESISTE. Se calcolo $f(0,0) = -1/e$, $f(1,2) = 4+4-4e = 8-4e$ vedo che

$8-4e < -1/e \iff 8e-4e^2+1<0 \iff 4e^2-8e-1>0 \iff e \notin \left[\frac{4-\sqrt{16+4}}{4}, \frac{4+\sqrt{20}}{4}\right]$

e in effetti $e > 1+\frac{\sqrt{20}}{4}$ perché $1+\frac{\sqrt{20}}{4} < 1+\frac{5}{4} = 2{,}2$ (SI PUÒ ANCHE USARE la calcolatrice)

$\Rightarrow \min_B f = f(1,2) = 8-4e$. Per trovare: punti critici su B si può in alternativa usare Lagrange:

$$\begin{cases} 8x - 4y\, e^{xy-1} = \lambda y \\ 2y - 4x\, e^{xy-1} = \lambda x \\ xy = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x - (4e+\lambda)y = 0 \\ -(4e+\lambda)x + 2y = 0 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow 8\cdot 2 - (4e+\lambda)^2 = 0 \iff 4e+\lambda = \pm 4$$

(dato che le prime due righe costituiscono un sistema omogeneo che deve avere sol. $(x,y) \neq (0,0)$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda+4e = \pm 4 \\ 8x = \pm 4y \\ xy = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda+4e = 4 \\ y = 2x \\ x^2 = 1 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} \lambda+4e = -4 \\ y = -2x \\ -x^2 = 1 \end{cases} \leftarrow \text{IMPOSSIBILE}$$

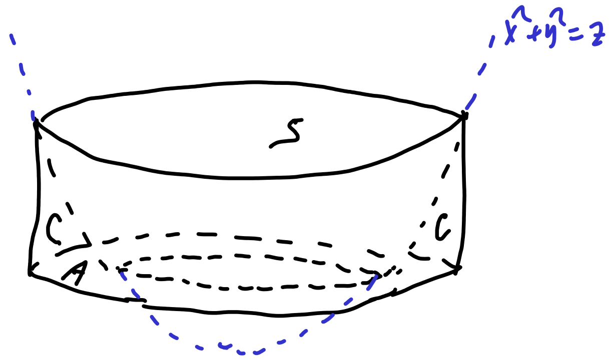
$\Rightarrow$ $x = \pm 1 \quad y = \pm 2$ $(\lambda = 4-4e)$ che ci dà i punti di prima (dopo il ragionamento è lo stesso)

2. Si considerino gli insiemi

$$\Omega := \{x^2+y^2 \leq 4, 1 \leq z \leq x^2+y^2\}, \qquad S := \{1 \leq x^2+y^2 \leq 4, z = x^2+y^2\}$$

e il campo vettoriale $\vec{f} := \dfrac{2y}{x^2+y^2}\vec{\mathbf{i}} - \dfrac{3x}{x^2+y^2}\vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{k}}$.

(a) Si descriva la frontiera di Ω.(1p)



$\partial\Omega = S \cup C \cup A$ dove

$C = \{x^2+y^2 = 2,\ 1 \leq z \leq 4\}$

$A = \{1 \leq x^2+y^2 \leq 2,\ z = 4\}$

(C = "cilindro", A = "Anello")

(b) Si trovi una parametrizzazione per S (1p.) e per tale parametrizzazione si calcoli la normale (1p).

Si può prendere la parametrizzazione (o anche $T(x,y) = x\vec{i}+y\vec{j}+(x^2+y^2)\vec{k}$ ...)

$x = \rho\cos\theta$
$y = \rho\sin\theta$
$z = \rho^2$

al variare dei parametri in $R = \{0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 1 \leq \rho \leq 2\}$

In tal caso $T(\theta,\rho) = \rho\cos\theta\,\vec{i} + \rho\sin\theta\,\vec{j} + \rho^2\vec{k}$ e

$\frac{\partial}{\partial\rho}T = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} + 2\rho\vec{k}$; $\frac{\partial}{\partial\theta}T = -\rho\sin\theta\,\vec{i} + \rho\cos\theta\,\vec{j}$ e

$\vec{n}(\theta,\rho) = \frac{\partial}{\partial\theta}T \otimes \frac{\partial}{\partial\rho}T = 2\rho^2\cos\theta\,\vec{i} + 2\rho^2\sin\theta\,\vec{j} - \rho\vec{k}$

(che punta verso l'esterno e quindi va bene per il punto c)

(c) Si calcoli il flusso uscente di $\vec{f}$ attraverso la frontiera di Ω USANDO LA DEFINIZIONE DI FLUSSO (5p.).

- $\phi(\vec{f}, S) = \iint_S \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \iint_R \vec{f}(\rho\cos\theta, \sin\theta, \rho^2)\cdot\vec{n}(\theta,\rho)\, d\rho\, d\theta =$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \left(\frac{2\rho\sin\theta}{\rho^2}\cdot 2\rho^2\cos\theta - \frac{3\rho\cos\theta}{\rho^2}\cdot 2\rho^2\sin\theta + \rho\right) d\rho =$$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} -\sin\theta\cos\theta\, d\theta}_{=0} \int_1^2 \rho\, d\rho - \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \rho\, d\rho = -2\pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2 = 3\pi$$

- Dato che la normale uscente su A è $\vec{k}$ e che $f_3(x,y,z) = -1$ si ha

$\phi(\vec{f}, A) = -|A| = -(\text{area di } B(0,2) - \text{area di } B(0,1)) = -(4\pi - 3\pi) = -3\pi$

- Per il flusso su C notiamo che la normale unitaria uscente in $(x,y,z)\in C$ è $\vec{\nu}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j}$ (dato che $x^2+y^2=4$) e quindi

$\phi(\vec{f}, C) = \iint_C (2xy - 3xy)\, d\sigma = -\iint_C xy\, d\sigma \leftarrow$ FA ZERO per motivi di simmetria

VOLENDO POSSO PARAMETRIZZARE C con $\Gamma(\theta,z) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, $0\le\theta\le 2\pi$, $1\le z\le 4$

$\|\Gamma_\theta \otimes \Gamma_z\| = 1 \Rightarrow \iint_C xy\, d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_1^4 \cos\theta\sin\theta\, d\theta\, dz = 4\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\, d\theta = 0$

IN DEFINITIVA $\phi(\vec{f}, \partial\Omega) = \boxed{3\pi - 3\pi + 0 = 0}$

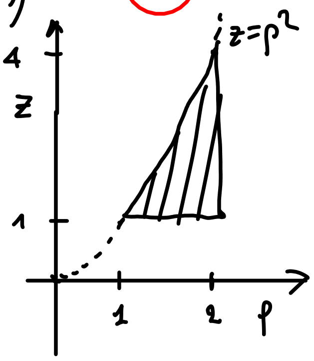
(d) Si ricalcoli il flusso del punto precedente usando il teorema della divergenza (3p.).

SE SI USA IL T. DELLA DIVERGENZA SI HA

$$\operatorname{div}(\vec{f}) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{-3x}{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial z}(-1) = 2y\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} - 3x\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$ e

$$\iiint_\Omega \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \rho\, d\rho \int^{\rho^2} dz\, \frac{2\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta}{\rho^4} = \int_0^{2\pi} 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_1^2 \frac{\rho^2-1}{\rho}\, d\rho =$$

$$\int_0^{2\pi}\sin 2\theta\, d\theta \left[\frac{\rho^2}{2} - \ln\rho\right]_1^2 = \underbrace{\left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi}}_{=0}\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} - \ln(2) + \ln(1)\right) = 0$$

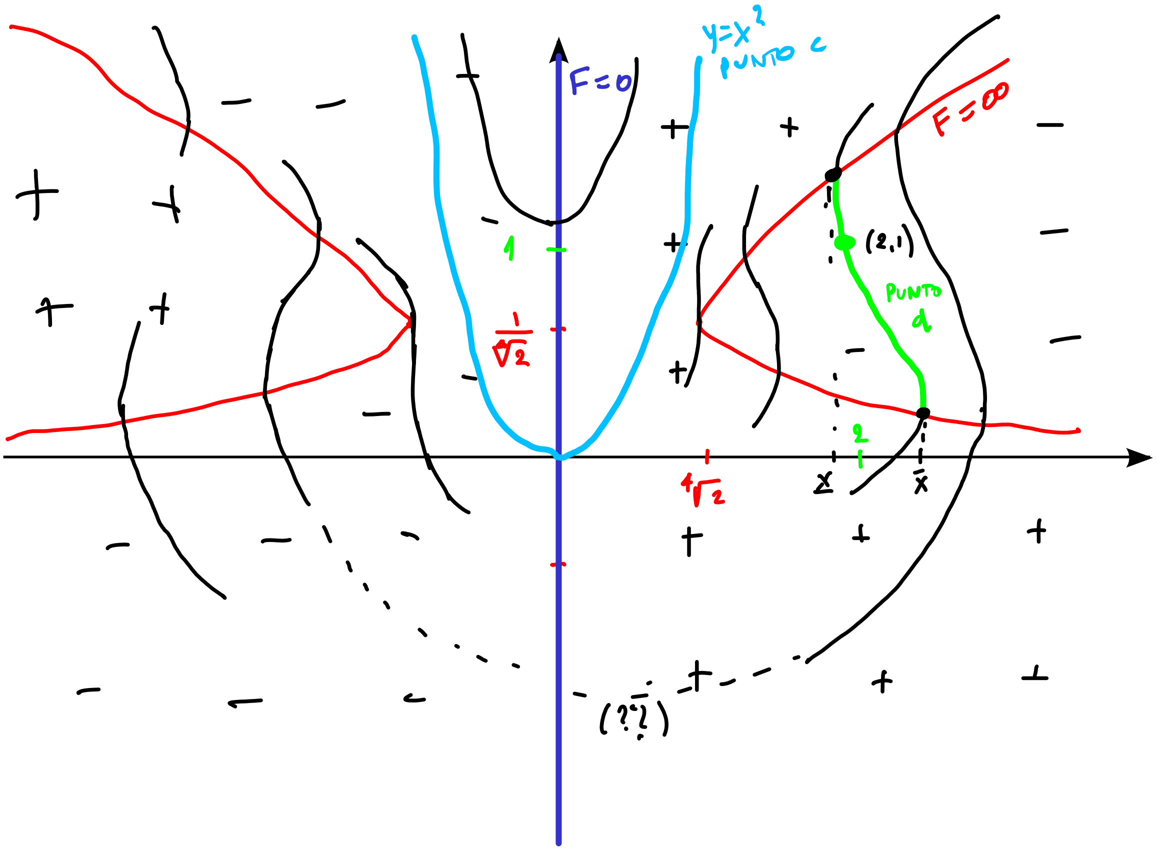


SEZIONE DI Ω nel piano ρ, z (Ω è ottenuto ruotando la figura qui a destra)

3. Si consideri l'equazione differenziale

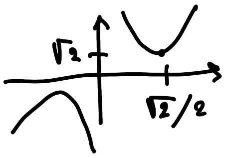
$$y' = \frac{2x}{2y^2 - 2yx^2 + 1}$$

(a) Si trovi il dominio della funzione $F(x, y) = \frac{2x}{2y^2 - 2yx^2 + 1}$ (il secondo membro dell'equazione) e le zone del piano xy in cui F è positiva/negativa/nulla, riportandole nel diagramma sottostante. Si usino tali informazioni per tracciare un grafico qualitativo (anche parziale) delle soluzioni dell'equazione (2p.).



Perché F sia definita deve essere $2y^2 - 2x^2y + 1 \neq 0 \iff x^2 \neq \frac{1}{2y} + y =: \varphi(y)$

Faccio il grafico di $\varphi(y)$: vedo che φ è dispari, $\varphi(0^+) = +\infty$, $\varphi(+\infty) = +\infty$, $\varphi'(y) = -\frac{1}{2y^2} + 1$



. Dato che $\varphi(y) > 0$ per $y > 0$ ricavo $x = \pm\sqrt{\varphi(y)}$ per $y > 0$ e ribaltando il grafico di $\sqrt{\varphi(y)}$ trovo le curve rosse sopra

Chiaramente $F(x,y) = 0$ per $x = 0$ (LINEA BLU). Se ne deducono i segni di F come rappresentati sopra

(b) Si trovi un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x, y) = \lambda(y)$. Si trovi poi un integrale primo (5p.).

Deve essere $\frac{\partial}{\partial y}\lambda(y)(-2x) = \frac{\partial}{\partial x}\lambda(y)(2y^2 - 2x^2y + y) \iff$

$-\lambda'(y)\,2x = \lambda(y)(-4xy) \iff \lambda'(y) = 2y\lambda(y) \iff \lambda(y) = c\,e^{y^2}$ $\quad c \in \mathbb{R}$

Per esempio $\lambda(y) = e^{y^2}$. Trovo un potenziale Φ per $(-2x\vec{i} + (2y^2 - 2x^2y + 1)\vec{j})e^{y^2}$

$\frac{\partial}{\partial x}\phi = -2x e^{y^2} \Leftrightarrow \phi(x,y) = -x^2 e^{y^2} + c(y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y) = -2yx^2 e^{y^2} + c'(y)$

e dato che $\frac{\partial}{\partial y}\phi = e^{y^2}(2y^2 - 2x^2y + 1)$ ricavo $c(y) = \int (2y^2+1)e^{y^2}dy =$

$\int y\, 2y e^{y^2} + \int e^{y^2} = y e^{y^2} - \int e^{y^2}dy + \int e^{y^2}dy = y e^{y^2} + c$

PER PARTI

DUNQUE $\phi(x,y) = (y - x^2)e^{y^2}$ (+ costante). Ricordiamo che

se $y(x)$ risolve l'equazione $\Rightarrow$ $\phi(x, y(x))$ è costante

(c) Si trovi la soluzione $y(x)$ relativa al dato iniziale $(0,0)$, e se ne riporti il grafico nel diagramma della pagina precedente (1p.)

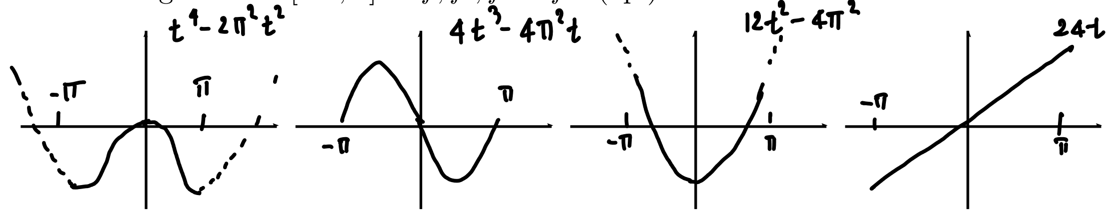
Si ha $\phi(0,0) = e^{0^2}(0 - 0^2) = 0$. Dunque $e^{y^2}(y - x^2) = 0 \Leftrightarrow y = x^2$

(d) Si tracci il grafico qualitativo della soluzione relativa al dato iniziale $(2,1)$ giustificando il più possibile (3p.).

$y(x)$ deve essere decrescente. Andando all'indietro $y(x)$ deve finire sulla curva rossa in un tempo finito $\underline{x} > \sqrt[4]{2}$ (e con un valore $\underline{y}$ tra 1 e $\sqrt[4]{2}$)
Andiamo in avanti: o $\bar{x} = +\infty$ oppure $\bar{x} < +\infty$. Se fosse $\bar{x} = +\infty$ avrei
$\phi(x, y(x)) = e^{y(x)^2}(y(x) - x^2) \to -\infty$ dato che $y(x)$ rimane tra 0 e 1.
Questo è impossibile se $\phi(x, y(x))$ è costante. Dunque $\bar{x}$ è finito e la curva va a finire (anche in avanti) sulla curva rossa in un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ con $\bar{x} > 2$ e $\bar{y} < 1$.

4. Si consideri la funzione f definita da $f(t) := t^2(t^2 - 2\pi^2)$ per le $t \in [-\pi, \pi]$ ed estesa tutto $\mathbb{R}$ in modo da essere 2π periodica.

(a) Si tracci il grafico su $[-\pi, \pi]$ di f, f', f'' e f''' (1p.).



f f' f'' f'''

(b) Si trovino i coefficienti di Fourier a_n e b_n per f (6p.)

f è pari $\Rightarrow$ $b_n = 0 \ \forall n$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(t^4 - 2\pi^2 t^2)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^5}{5} - \frac{2\pi^2}{3}t^3\right]_0^{\pi} = \pi^4\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right) = -\frac{7}{15}\pi^4$$

$$n \geq 1 \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(t)\,dt = \underbrace{\frac{2}{\pi}\left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0 \text{ (per il seno)}} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} f'(t)\sin(nt)\,dt$$

$$= \underbrace{-\frac{2}{\pi n}\left[f'(t)\frac{\cos(nt)}{-n}\right]_0^{\pi}}_{=0 \text{ (per } f')} - \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{\pi} f''(t)\cos(nt)\,dt = \underbrace{-\frac{2}{\pi n^2}\left[f''(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0 \ (\sin(t))} + \frac{2}{\pi n^3}\int_0^{\pi} f'''(t)\sin(t)$$

$$= \frac{2}{\pi n^3}\left[f'''(t)\frac{\cos(nt)}{-n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n^4}\int_0^{\pi} f^{IV}(t)\cos(nt)\,dt = \frac{-2}{\pi n^4}\,24\pi\cos(n\pi) + \frac{48}{\pi n^4}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt}_{=0}$$

$$= -\frac{48(-1)^n}{n^4}.$$

DUNQUE $$f(t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{48(-1)^n}{n^4}\cos(nt) - \frac{7}{15}\pi^4 \qquad (\star)$$

(c) Si dica (motivando) se si può "derivare per serie" (cioè se la serie ottenuta derivando termine a termina la serie di Fourier converge alla derivata di f). (1p.)

La risposta è affermativa

Infatti $\sum |a_n| = \frac{7}{15}\pi^2 + \sum_1^{\infty}\frac{1}{n^4}$ CONVERGE ($\Rightarrow$ la serie di F. conv. unif.)

Inoltre $\sum_1^{\infty} n|a_n| = \sum_1^{\infty}\frac{1}{n^3}$ CONVERGE ($\Rightarrow$ la serie delle derivate converge unif. alla derivata)

Nota che anche $\sum n^2|a_n|$ CONVERGE $\Rightarrow$ si può derivare DUE VOLTE sotto il segno di serie

(d) Si usi quanto sopra per calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ (2p.)

Calcolo $f(\pi) = \pi^4 - 2\pi^2\pi^2 = -\pi^2$. Uso la formula (☆)

$$-\pi = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{48}{n^4}(-1)^n(-1)^n - \frac{7}{15}\pi^4 \iff -\frac{8\pi^4}{15} = -48\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \iff$$

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{15\cdot 6} = \frac{\pi^4}{90}$$