COGNOME: CORREZIONE

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 4 febbraio 2016 - PARTE A[1]

1. Dato un insieme A in $\mathbb{R}^N$ e un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ di scriva la definizione di ∂A (frontiera di A) (2p.)

∂A = insieme dei punti di frontiera per A, dove x_0 è di frontiera per A se ogni intorno di x_0 contiene un punto di A e un punto fuori di A.

2. Data la funzione f definita da $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^4}$ per $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$ si dica se:

- f è continua in $(0,0)$ (2p.) IN COORD. POLARI $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\sin\theta$

$$|f(x,y)| = \left| \frac{\rho^3 \cos^2\theta \sin\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^4 \sin^4\theta} \right| = \frac{\rho\cos^2\theta|\sin\theta|}{\cos^2\theta + \rho^2\sin^4\theta} \leq$$

$$\rho\frac{\cos^2\theta|\sin\theta|}{\cos^2\theta} = \rho|\sin\theta| \leq \rho$$ DUNQUE

f è continua

- f è differenziabile in $(0,0)$ (2p.) Fisso $\vec{v} = (v_x, v_y) \neq (0,0)$ e faccio la derivata direzionale

$$f'(0)\vec{v} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h\vec{v})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{h^3 v_x^2 v_y}{h^2 v_x^2 + h^4 v_y^4} = \lim_{h\to 0}\frac{v_x^2 v_y}{v_x^2 + h^2 v_y^4}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } v_x = 0 \\ v_y & \text{se } v_x \neq 0 \end{cases}$$ ← NON È LINEARE IN V ⇒ f NON È DIFFERENZIAB.

3. Si calcoli la lunghezza del grafico di $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$ nell'intervallo $[-1,1]$. (3p.).

$$\text{lunghezza} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left[\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right]^2} = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$$

$(x = \sinh t$
$dx = \cosh t\, dt)$

[1] PUNTEGGIO MINIMO =7p.

$$= 2\int_0^1 \cosh^2(t)\,dt = 2\int_0^1 \frac{\cosh(2t)+1}{2}\,dt = \left[\frac{\sinh(2t)}{2}+t\right]_0^1$$

$$= 1 + \frac{\sinh(2)}{2} = 1 + \frac{e^2 - e^{-2}}{2}$$

4. Si dica per quali valori del parametro $\alpha > 0$ esiste l'integrale improprio $\iint_{A_\alpha} \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy$, dove $A_\alpha := \{0 < x < 1, 0 < y < x^\alpha\}$. (3p.).

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^\alpha} \frac{dy}{x^2+y^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2}\int_0^{x^\alpha} \frac{dy}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x}\left[\arctan\frac{y}{x}\right]_0^{x^\alpha} =$$

$\int_0^1 \frac{\arctan x^{\alpha-1}}{x}\,dx$. Dato che $\arctan t = t + o(t)$ per $t \to 0$

si ha che $\alpha > 1 \Rightarrow$ INTEGRANDO $\simeq x^{\alpha-2}$ INTEGRABILE perché $\alpha - 2 > -1$. Se $\alpha \leq 1$ $\arctan(x^{\alpha-1}) \simeq$ costante $\Rightarrow$ INTEGRANDO $\simeq \frac{1}{x}$ NON INTEGRABILE

DUNQUE $\boxed{\alpha > 1}$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Sia $\vec{f}$ un campo definito su $\Omega := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \neq 0\}$ tale che $\vec{\nabla}\cdot\vec{f} = 0$. Allora $\vec{f}$ ammette sicuramente un potenziale vettore $\vec{F}$ ($\vec{f} = \vec{\nabla}\otimes\vec{F}$). $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\cancel{\text{FALSO}}}$

(b) Date $G_1, G_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenziabili siano $M_1 := \{(x,y,z) : G_1(x,y,z) = 0\}$ e $M_2 := \{(x,y,z) : G_2(x,y,z) = 0\}$. Sia P_0 un punto dell'intersezione $M := M_1 \cap M_2$. Quale condizione richiede il teorema delle funzioni implicite per garantire che vicino a P_0 M si descrive con una curva regolare?

$\boxed{\nabla G_1(P_0) \neq \vec{0},\ \nabla G_2(P_0) \neq \vec{0}}$, $\boxed{\cancel{\nabla G_1(P_0) \text{ e } \nabla G_2(P_0) \text{ linearmente indipendenti}}}$, $\boxed{\nabla G_1(P_0)\cdot\nabla G_2(P_0) = 0}$, $\boxed{\nabla G_1(P_0)\otimes\nabla G_2(P_0) = \vec{0}}$, $\boxed{\text{nessuna delle precedenti}}$

(c) La serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ converge puntualmente su:

$\boxed{]-1,1[}$, $\boxed{]-1,1]}$, $\boxed{\cancel{[-1,1[}}$, $\boxed{[-1,1]}$, $\boxed{\text{nessuna delle precedenti}}$

(d) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin(nt) - cos(nt)}{n^3}$ è la serie di Fourier di una funzione derivabile. $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 4 febbraio 2016 - PARTE B   Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) := x^2 + y^2 - xye^{x+y-2}$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (4p.).

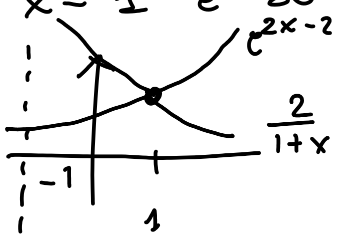
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - (y + xy)e^{x+y-2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - (x + xy)e^{x+y-2}$$

(PTI STAZ) $\Rightarrow$ (*) $\begin{cases} 2x = y(1+x)e^{x+y-2} \\ 2y = x(1+y)e^{x+y-2} \end{cases} \Rightarrow$ SOTTRAENDO LE 2 RIGHE $2(x-y) = (y-x)e^{x+y-2}$

$\Leftrightarrow$ (a) $x = y$ oppure (b) $e^{x+y-2} = -2$ IMPOSSIBILE

DUNQUE $2x = x(1+x)e^{2x-2} \Leftrightarrow$ (a) $x=0$ oppure (b) $e^{2x-2} = \frac{2}{1+x}$

Se $x=0 \to y=0$. Risolvo (b) graficamente notando che $x = 1$ è soluzione. VEDO CHE $x=1$ È L'UNICA SOL.



I PUNTI CRITICI SONO $(0,0)$ e $(1,1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - (2y + xy)e^{x+y-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 - (2x + xy)e^{x+y-2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1 + x + y + xy)e^{x+y-2}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & e^{-2} \\ e^{-2} & 2 \end{pmatrix}$$

$\det = 4 - e^{-4} > 0 \quad 2 > 0$ $\boxed{(0,0) \text{ MINIMO}}$

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det = 1 - 16 < 0$ $\boxed{(1,1) \text{ SELLA}}$

   (b) Si trovino il massimo e il minimo di f sul dominio $B := \{x^2 + y^2 \leq 5/4, y \geq 0\}$.(5p.).

USO I MOLTIPLICATORI PER TROVARE I PUNTI CRITICI SU $\partial B \cap \{y>0\}$

$$\begin{cases} 2x - (y + xy)e^{x+y-2} = 2\lambda x \\ 2y - (x + xy)e^{x+y-2} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 5/4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2(1-\lambda)x = (y + xy)e^{x+y-2} \\ 2(1-\lambda)y = (x + xy)e^{x+y-2} \\ x^2 + y^2 = 5/4 \end{cases}$$

SOTTRAGGO I-II

$2(1-\lambda)(x-y) = (y-x)e^{x+y-2} \Leftrightarrow$ (a) $x = y$ opp. (b) $e^{x+y-2} = 2(1-\lambda)$ $(\Rightarrow \lambda \neq 1)$

CASO (a) → $2x^2 = 5/4 \iff x = \pm \dfrac{\sqrt{5}\sqrt{2}}{4} = y$

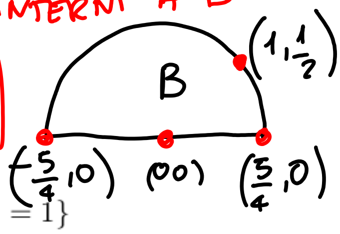
CASO (b) → $\begin{cases} x = y(1+x) \\ x^2+y^2 = 5/4 \end{cases} \iff y = \dfrac{x}{1+x}$ e $\dfrac{x^2}{(1+x)^2} + x^2 = \dfrac{5}{4}$

$\iff \underbrace{x^2\left(1+\dfrac{1}{(1+x)^2}\right)}_{\varphi(x)} = \dfrac{5}{4}$ | VEDO CHE $\varphi'(x) = 2x\left(1+\dfrac{1}{(1+x)^2}\right) + x^2\left(\dfrac{-2}{(1+x)^3}\right) = 2x\left(1+\dfrac{1}{(1+x)^3}\right)$

$\Rightarrow$ φ è crescente sulle $x>0$. Dato che $\varphi(1) = \dfrac{5}{4} \iff$ $\boxed{x=1}$ è l'unico sol. possibile, che corrisponde a $\boxed{y=1/2}$. Si ha $\boxed{f(1,1/2) = \dfrac{5}{4}+\dfrac{\sqrt{e}}{2}}$. Rimane da studiare f su $\{y=0\ -\frac{5}{4} \le x \le 5/4\}$. Si ha $\boxed{f(0,0)=0}$ su cui f coincide con x^2.

NON CI SONO PTI STAZ. INTERNI A B

$\boxed{f(\pm\frac{5}{4},0) = \dfrac{25}{16}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\min_B f = 0,\ \max_B f = \dfrac{5+2\sqrt{e}}{4}}$



2. Si considerino le superfici:

$$S := \{z = 4x^2+y^2, x^2+y^2 \le 1\}, \qquad C := \{0 \le z \le 4x^2+y^2, x^2+y^2 = 1\}$$

dove su S si considera la normale concorde con l'asse z e su C la normale uscente dal dominio

$$\Omega := \{0 \le z \le 4x^2+y^2, x^2+y^2 \le 1\}.$$

Dato il campo $\vec{f}(x,y,z) := y(z+3y^2)\mathbf{\vec{i}} + x(z-3x^2)\mathbf{\vec{j}} + \dfrac{x^2y^2}{1+x^2+y^2}\mathbf{\vec{k}}$,

(a) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso S (5p.)

$(u,v) \in B := \{u^2+v^2 \le 1\}$

S è cartesiana $\Rightarrow$ parametrizzazione $\Gamma(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (4u^2+v^2)\vec{k}$

$\Gamma_u \otimes \Gamma_v = -8u\vec{i} - 2v\vec{j} + \vec{k}$. Applicando la definizione

$\phi(\vec{f},S) = \iint_B \vec{f}(u,v,4u^2+v^2)\cdot \Gamma_u \otimes \Gamma_v \, du\,dv =$

$\iint_B \left(-8uv(4u^2+v^2+3v^2) - 2uv(4u^2+v^2-3u^2) + \dfrac{u^2v^2}{4+u^2+v^2}\right) du\,dv =$

$\underbrace{-34\iint_B uv(u^2+v^2)\,du\,dv}_{①} + \underbrace{\iint_B \dfrac{u^2v^2}{1+u^2+v^2}\,du\,dv}_{②}$

① $=0$ dato che l'integrando è dispari e B è simmetrico

② (coordinate polari) $= \displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \dfrac{\rho^2\cos^2\theta\,\rho^2\sin^2\theta}{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho =$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\sin^2\theta}_{③} \qquad \underbrace{\int_0^1 \frac{\rho^5}{1+\rho^2}\,d\rho}_{④}$$

$$③ = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(4\theta)}{2}\,d\theta = \frac{1}{8}\left[\theta + \frac{\sin 4\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}$$

$$④ = \int_0^1 \frac{\rho^5+\rho^3-\rho^3-\rho+\rho}{1+\rho^2} =$$

$$\int_0^1 \left(\rho^3 - \rho + \frac{\rho}{1+\rho^2}\right)d\rho =$$

$$\left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\rho^2)\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\ln(2)}{2} = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \text{INTEGRALE} = \boxed{\frac{\pi}{16}(2\ln(2)-1)}$$

(b) Si dica (giustificando) se esiste un potenziale vettore $\vec{F}$ per $\vec{f}$ (1p.) e in caso affermativo si calcoli un possibile $\vec{F}$ (2p.).

si ho $\vec{\nabla}\cdot\vec{f} = 0$ dato che $\frac{\partial}{\partial x} f_1 = \frac{\partial}{\partial y} f_2 = \frac{\partial}{\partial z} f_3 = 0$!!

Dunque $\exists\ \vec{F}$. Posso cercare $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$ (NO F_3).

Le condizioni sono $D_z F_2 = -f_1$, $D_z F_1 = f_2$, $D_x F_2 - D_y F_1 = f_3$

$$\Rightarrow \quad F_2 = -\int y(z+3y^2)\,dz = -\frac{yz^2}{2} - 3y^3z + c(x,y)$$

$$F_1 = \int x(z-3x^2)\,dz = \frac{xz^2}{2} - 3x^3z + d(x,y)$$

$$\Rightarrow (D_xF_2 - D_yF_1 =)\ D_x c(x,y) - D_y d(x,y) = \frac{x^2y^2}{1+x^2y^2}$$. Posso prendere

$d=0$ e quindi $c = \int \frac{x^2y^2}{1+x^2+y^2}\,dx = \frac{y^2}{1+y^2}\int \frac{x^2}{1+\frac{x^2}{1+y^2}}\,dx =$

$$= y^2\int dx - \frac{y^2}{1+y^2}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{1+y^2}} = xy^2 - y^2\arctan\left(\frac{x^2}{1+y^2}\right) + \text{cost.}$$

DUNQUE $$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{xz^2}{2} - 3x^3z\right)\vec{i} + \left(xy^2 - y^2\arctan\left(\frac{x^2}{1+y^2}\right) - \frac{yz^2}{2} - 3y^3z\right)\vec{j}$$

(c) Si trovi una parametrizzazione $\gamma(t)$ per il contorno di S, percorso nel verso coerente con S (1p)

Basta parametrizzare $x=\cos(t)$ e $y=\sin(t)$ e usare $z=4x^2+y^2$

$$\Rightarrow \gamma(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + (4\cos^2(t)+\sin^2(t))\vec{k} =$$

$$= \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + \left(\frac{3}{2}\cos(2t)+\frac{5}{2}\right)\vec{k}$$

(d) Nel caso il campo $\vec{F}$ esista si dica quanto fa $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$ (2p.)

Per stokes: $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{f} \cdot d\vec{\nu} = \boxed{\frac{\pi}{16}\left(2\ln(2)-1\right)}$

(e) Si dica quanto fa il flusso di $\vec{f}$ attraverso C. (2p.)

Dato che $\operatorname{div} \vec{f} = 0 \Rightarrow \iint_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot d\vec{\nu} = 0$. Si ha $\partial\Omega = S \cup C \cup B$ dove $B = \{x^2+y^2 \le 1, z=0\}$. Allora $\iint_B \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \iint_B \vec{f} \cdot (-\vec{k})$

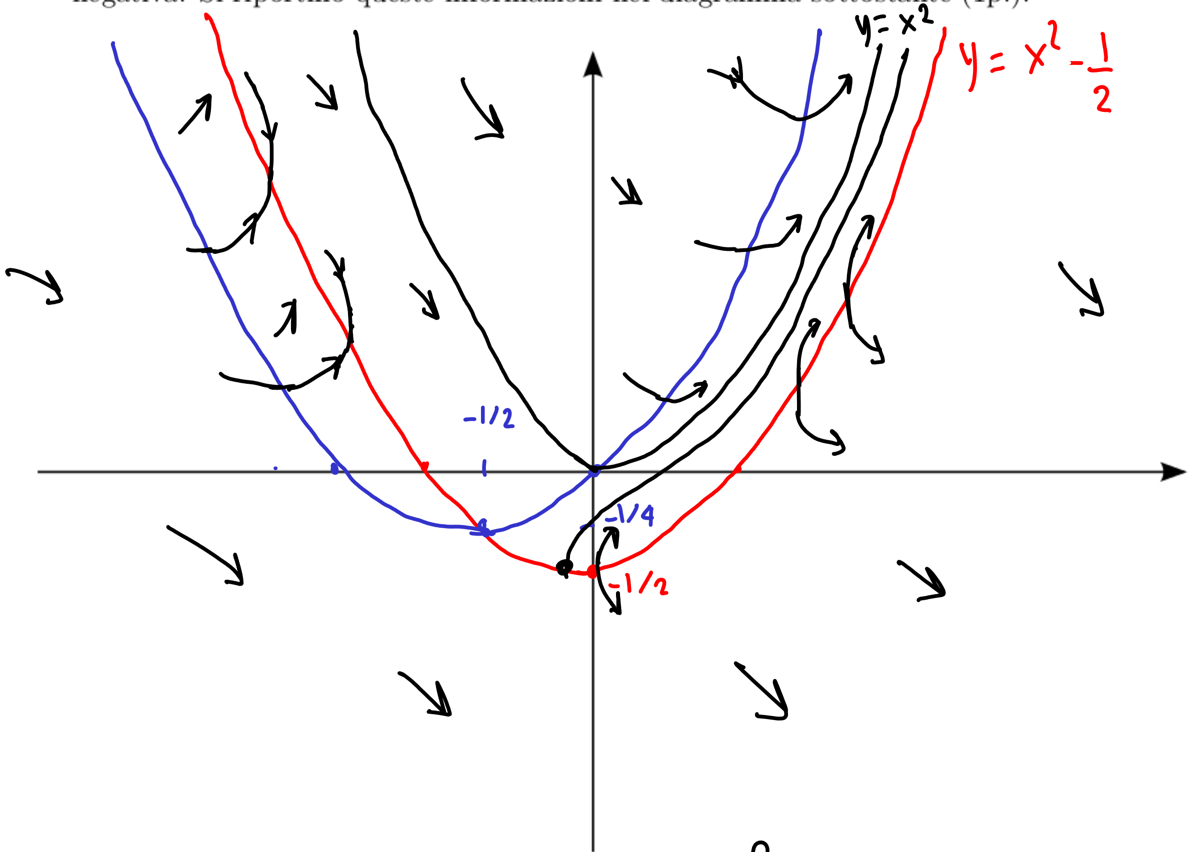
$= -\int_{\{u^2+v^2 \le 1\}} \frac{u^2 v^2}{1+u^2+v^2} =$ (VISTO SOPRA) $= -\frac{\pi}{16}\left(2\ln(2)-1\right)$.

DUNQUE $0 = \underbrace{\iint_S \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma}_{=\frac{\pi}{16}(2\ln 2 - 1)} + \iint_C \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma + \underbrace{\iint_B \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma}_{=-\frac{\pi}{16}(2\ln 2 - 1)} \Rightarrow \boxed{\iint_C \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = 0}$

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2x^2 + 2x - 2y}{2y - 2x^2 + 1}$$

(a) Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).



Il t. di Cauchy vale per $y \neq x^2 - \frac{1}{2}$

Le zone di monotonia sono separate dalle curve $y = x^2 - \frac{1}{2}$ (ROSSA) e $y = x^2 + x$ (BLU - le curve le attraversano con derivata nulla)

(b) Si trovi un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x, y) = \lambda(x + y)$. Si trovi poi un integrale primo (6p.).

$$\frac{\partial}{\partial y} \lambda(x+y)(2y - 2x^2 - 2x) = \frac{\partial}{\partial x} \lambda(x+y)(y - 2x^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\lambda'(x+y)(\cancel{y} - \cancel{2x^2} - 2x) + \lambda(x+y)\,2 = \lambda'(x+y)(\cancel{y} - \cancel{2x^2} + 1) + \lambda(x+y)(-4x) \Leftrightarrow$$

$$\lambda'(x+y)(-2x-1) = \lambda(x+y)(-4x-2) \Leftrightarrow \lambda' = 2\lambda \quad \text{dunque}$$

$\lambda(t) = e^{2t} = \boxed{e^{2x+2y}}$ Cerco l'int. primo $\phi(x,y)$

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi = e^{2x+2y}(2y - 2x^2 + 1) \Rightarrow \phi = e^{2x}\int e^{2y}(2y - 2x^2 + 1)\,dy =$$

$$e^{2x} e^{2y}\left(-x^2 + \frac{1}{2}\right) + e^{2x}\int e^{2y}\, 2y\, dy = e^{2x+2y}\left(-x^2 + \frac{1}{2}\right) + e^{2y} y -$$

$$e^{2x}\int e^{2y}\, dy = e^{2x+2y}\left(y - x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + c(x) = e^{2x+2y}(y - x^2) + c(x)$$

FACCIO $\frac{\partial \phi}{\partial x} = e^{2x+2y}(2y - 2x^2 - 2x) + c'(x)$ che deve essere eguale a $e^{2x+2y}(2y - 2x^2 - 2x) \Rightarrow c' = 0$ cioè $c =$ costante

IN DEFINITIVA $\boxed{\phi(x,y) = e^{2x+2y}(y - x^2)}$ (+ costante)

(c) Si trovi la soluzione $y(x)$ relativa al dato iniziale $(0, 0)$, e se ne riporti il grafico nel diagramma della pagina precedente (1p.)

Dato che $\phi(0,0) = 0 \Rightarrow \phi(x, y(x)) = 0$ cioè $\boxed{y = x^2}$

(d) Si tracci il grafico qualitativo della soluzione relativa al dato iniziale $(0, -1/4)$ trovandone in particolare l'intervallo di esistenza massimale $]\underline{x}, \overline{x}[$ (3p.).

Usando i segni di y' si vede che $y(x)$ cresce e si "piazza" tra $y=x^2$ e la curva rosso $\Rightarrow$ $\bar{x} = +\infty$. INVECE $(\underline{x}, \underline{y}) \in$ "CURVA ROSSA" $\cap \left\{ \Phi(x,y) = \Phi(0,-1/4) = -\frac{\sqrt{e}}{4} \right\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} y = x^2 - \frac{1}{2} \\ e^{2x+2y}(y - x^2) = -\frac{\sqrt{e}}{4} \end{cases} \Rightarrow e^{2x+2x^2-1}\left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{e^{1/2}}{4} \Leftrightarrow e^{2x^2+2x-1} = \frac{e^{1/2}}{2}$$

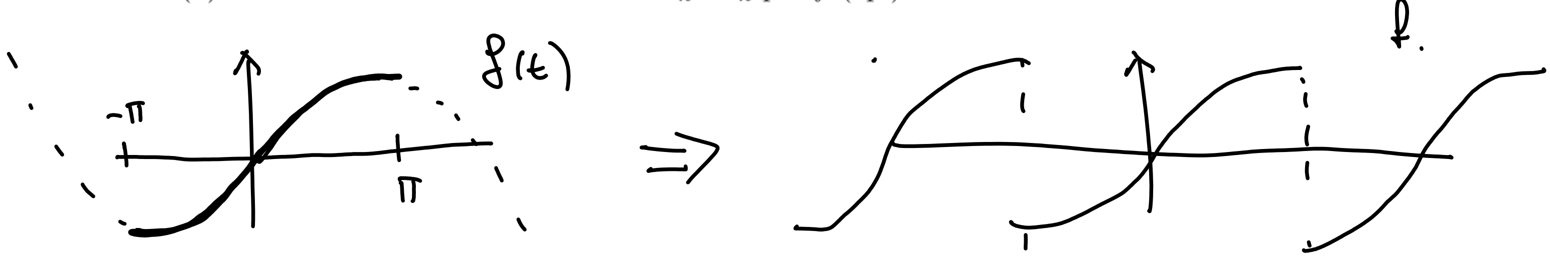
$$\Leftrightarrow 2x^2+2x-1 = \frac{1}{2} - \ln(2) \Leftrightarrow 4x^2+4x-3+\ln(4)=0 \Rightarrow$$

$$\underline{x} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4(3-\ln 4)}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{16 - 4\ln 4}}{4} \Rightarrow \underline{x} = \frac{-1+\sqrt{4-\ln 4}}{2}$$

DEVE ESSERE $\underline{x} > -\frac{1}{2}$

4. Si consideri la funzione f definita da $f(t) := t(t^2 - 3\pi^2)$ per le $t \in [-\pi, \pi]$ ed estesa tutto $\mathbb{R}$ in modo da essere 2π periodica.

(a) Si trovino i coefficienti di Fourier a_n e b_n per f (6p.)



(f è discontinua in $\pi + 2k\pi$). f è dispari $\Rightarrow a_n = 0 \ \forall n$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t(t^2-3\pi^2)\sin(nt) =$$

$$\frac{2}{\pi}\left[t(t^2-3\pi^2)\frac{\cos(nt)}{-n} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}(3t^2-3\pi^2)\cos(nt)$$

$$= -\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{n}(\pi^2-3\pi^2)\cos(n\pi) + \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\underbrace{\left[(3t^2-3\pi^2)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0}$$

$$-\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\int_0^{\pi} 6t\sin(nt)\,dt = \frac{4(-1)^n\pi^2}{n} + 0 - \frac{2}{\pi n^2}\left[\frac{6t\cos(nt)}{-n}\right]_0^{\pi}$$

$$+\frac{12}{\pi n^3}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt = \boxed{\frac{(-1)^n 4\pi^2}{n} + \frac{12}{n^3}(-1)^n} + \underbrace{\frac{12}{\pi n^3}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0}$$

(b) Si dica (motivando) se la serie converge uniformemente (1p.) e sesi può “derivare per serie” (cioè se la serie ottenuta derivando termine a termina la serie di Fourier converge alla derivata di f). (2p.)

DATO CHE f è discontinua non c'è la conv. uniforme e a maggior ragione non si può derivare per serie

)