COGNOME:	C	O	R	R	E	Z	I	O	N	E		
NOME:												
MATR.:												

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 15 gennaio 2016 - PARTE A[1]

1. Dato un insieme A in $\mathbb{R}^N$ e un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ di scrivano le definizioni di:

   - "$\mathbf{x}_0$ è interno ad A" (1,5p.);

Esiste $r>0$ tale che $B(x_0, r) \subset A$

(dove $B(x_0, r) = \{ x : \|x - x_0\| < R \}$)

   - "A è aperto"(1,5p.).

Per ogni $x_0 \in A$ x_0 è interno ad A

2. Date $f_n : A \to \mathbb{R}$ si dica cosa significa che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge totalmente su A. (3p.).

Significa che $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)|$ è convergente

(si può anche scrivere $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, A} < +\infty$ dove

$\|f\|_{\infty, A} := \sup_{x \in A} |f(x)|$

3. Sia $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^n}$. Si dica per quali x $f(x)$ è ben definita (1p) e quanto fa (se esiste) $f''(0)$ (2p.)

[1] PUNTEGGIO MINIMO =7p.

~~Il raggio~~ Si tratta di una serie di potenze. Il raggio di conv.

è $R = 1 / \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$. Dunque

$f(x)$ è definita per ogni x. Per i risultati noti f è

derivabile e vale

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{(n+1)^n} x^{n-2} \Rightarrow f''(0) = \frac{2(2-1)}{(2+1)^2} 0^0 = \frac{2}{9}$$

4. Si calcoli l'area di $S := \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 1\}$. (3p.).

Si può vedere $S = \{ z = \underbrace{\sqrt{4-x^2-y^2}}_{g(x,y)}, \ x^2+y^2 \leq 3 \} \Rightarrow$

$$|S| = \iint_{x^2+y^2\leq 3} \sqrt{1 + \frac{\partial g}{\partial x}^2 + \frac{\partial g}{\partial y}^2}\, dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\leq 3} \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}}\, dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\leq 3} \frac{2\, dx\,dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}} =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{\sqrt{4-\rho^2}} \rho\, d\rho = 2\pi \int_0^3 \frac{ds}{\sqrt{4-s}} = 2\pi \left[-2\sqrt{4-s} \right]_0^3 = 4\pi (2 - 1) = 4\pi$$

OPPURE USANDO LE COORD. SFERICHE $x = 2\cos\theta \sin\psi$ $y = 2\sin\theta\sin\psi$ $z = 2\cos\psi$

$$|S| = 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/3} \sin\psi\, d\psi = 8\pi \left[-\cos\psi \right]_0^{\pi/3} = 8\pi \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4\pi$$

~~IN COORD. CILINDRICHE~~

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) Sia $\vec{f}$ un campo tale che, per ogni curva chiusa γ, valga $\int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{s} = 0$. Allora $\vec{f}$ è irrotazionale. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

(b) Siano $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione C^2 su un aperto Ω in $\mathbb{R}^N$ e $x_0 \in \Omega$ punto stazionario per f. Chiamiamo $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ gli autovalori della matrice Hessiana di f nel punto x_0. Se $\lambda_1 < 0$, allora x_0 non può essere di minimo relativo per f. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(c) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}^2$ se e solo se $|f|$ è integrabile in senso improprio su $\mathbb{R}^2$. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(d) Si può trovare una successione (a_n) in modo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converga su $[0,1]$.

$\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 15 gennaio 2016 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) := 2x^4 + 32y^4 - xy$.

   (a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (4p.).

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2^3 x^3 - y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2^7 y^3 - x$. PTI STAZ $\Rightarrow \begin{cases} y = 2^3 x^3 \\ x = 2^7 y^3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = 2^{24} y^9 \\ x = 2^7 y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} 1 = 2^{24} y^8 \\ x = 2^3 y^3 \end{cases}$ se $(x,y) \neq (0,0)$. $\begin{cases} \pm 1 = 2^3 y \\ x = 2^3 y^3 \end{cases}$

$\Rightarrow (0,0) \quad , \pm\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 3 \cdot 2^3 x^2 ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3 \cdot 2^7 y^2$.

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ det $< 0 \Rightarrow$ SELLA

$Hf\left(\pm\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)\right) = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ -1, & 6 \end{pmatrix}$ det > 0, $\frac{3}{2} > 0$ MINIMO

   (b) Si dica se f ammette massimo/minimo e in caso affermativo si calcolino tali valori.(2p.).

Dato che $f(x,y) \geq 2x^4 + 32y^4 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$ (da $2|xy| \leq x^2 + y^2$)

$= \left(2x^4 - x^2/2\right) + \left(32 y^4 - y^2/2\right)$ deduco

$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = +\infty$. DUNQUE f HA MINIMO e

f NON HA MAX. I possibili pt. di min sono $\pm\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$

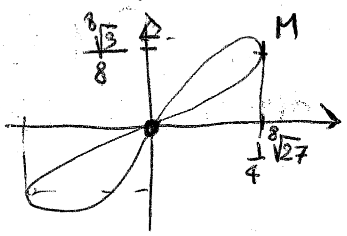
$\Rightarrow \min f = f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right) = \frac{2}{2^8} + \frac{2^5}{2^{12}} - \frac{1}{2^2 2^3} = \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^5} = \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^5} = -\frac{1}{2^6} = -\frac{1}{64}$

(c) Posto $M := \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$ si trovino i punti $(x_0,y_0)\in M$ vicino ai quali M si descrive sicuramente come grafico di una $y=g(x)$ (2p.).

I punti che vanno male sono quelli per cui $(x_0,y_0)\in M$ ma $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0)=0$

$\iff \begin{cases} 2x^4+32y^4-xy=0 \\ 2^7 y^3 = x\end{cases} \iff \begin{cases} 2^{29}y^{12} + (2^5-2^7)y^4 = 0 \\ x = 2^7y^3\end{cases} \iff \begin{cases} x=0\\ y=0\end{cases}$ oppure

$\begin{cases} 2^{29}y^8 = 2^5(4-1) \\ x=2^7y^3\end{cases} \iff \begin{cases} 2^{24}y^8 = 3 \\ x = 2^7y^3\end{cases} \iff$ $y = \pm\frac{\sqrt[8]{3}}{2^3}$ $\quad x = \pm\frac{\sqrt[8]{27}}{2^2}$



DUNQUE $(x,y)\neq(0,0)$

E $(x,y)\neq\left(\frac{\sqrt[8]{27}}{4},\frac{\sqrt[8]{3}}{8}\right)$

(d) Si dica se l'insieme M del punto precedente è limitato (1p.).

M è LIMITATO perché $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = +\infty$ e quindi per R opportuno si ha $\|(x,y)\|\geq R \Rightarrow f(x,y)\geq 1$. Ne segue che $M\subset B(0,R)$.

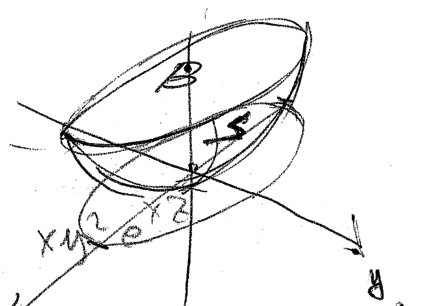
2. Si considerino i seguenti campi di vettori

$$\vec f_1 := xy^2z\vec{\mathbf{i}} + \sin(x)e^x z\vec{\mathbf{j}} + 2x^2z^2\vec{\mathbf{k}}, \qquad \vec f_2 := e^{xz}(2y\vec{\mathbf{i}} - zy^2\vec{\mathbf{j}})$$

e la superficie (in cui la normale si considera concorde con il versore $\vec{\mathbf{k}}$)

$$S := \{(x,y,z) : z = 4x^2+y^2\leq 1\}.$$

(a) Si calcoli il flusso di $\vec f_1$ attraverso S (5p.)



Chiamo $B = \{(x,y,z): z=1,\ 4x^2+y^2\leq 1\}$ e

$\Omega = \{(x,y,z): 4x^2+y^2\leq z\leq 1\}$ e^{xz}

Il bordo di Ω è l'unione di B ed S. Si ha

$\iint_B \vec f_1\cdot\vec\nu\, d\sigma$ (flusso) $= \iint_{\{4x^2+y^2\leq1\}} \vec f_1(x,y,1)\cdot\vec k\,dxdy = \iint_{\{4x^2+y^2\le1\}} 2x^2\,dxdy =$ $\left(\begin{array}{l} x=\frac{\rho}{2}\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ dxdy=\frac{\rho}{2}d\rho d\theta\end{array}\right)$

$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 2\left(\frac{\rho}{2}\cos\theta\right)^2\frac{\rho}{2}\,d\rho = \frac14\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta\int_0^1\rho^3\, d\rho = \frac14\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{16}\pi$

FACCIAMO ANCHE $\iiint_\Omega \operatorname{div}\vec f_1\,dxdydz = \iiint_\Omega z(4x^2+y^2)\,dxdydz = \iint_{4x^2+y^2\le1}(4x^2+y^2)\int_{4x^2+y^2}^1 z\,dz = \cancel{\frac{1}{2}\iint_{4x^2+y^2}}$

$$= \iint_{4x^2+y^2\le 1} (4x^2+y^2)\frac{\left(1^2-(4x^2+y^2)^2\right)}{2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\rho^2(1-\rho^4)}{2}\frac{\rho\, d\rho}{2} =$$

$$\frac{2\pi}{4}\left[\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^8}{8}\right]_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$

Per il teorema della divergenza (tenendo conto dell'orientazione di $\vec{\nu}$)

$$\frac{\pi}{16} = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{f}_1 = \iint_E (\vec{f}_1\cdot\vec{\nu})\,d\sigma - \iint_S (\vec{f}_1\cdot\vec{\nu})\,d\sigma =$$

($\vec{\nu}$ è ~~discorde~~ concorde con $\vec{k}$ e quindi discorde con la normale esterna a Ω)

$$\frac{\pi}{16} - \iint_S \vec{f}_1\cdot\vec{\nu}\,d\sigma.$$ Ne segue

$$\iint_S \vec{f}_1\,\vec{\nu}\,d\sigma = 0$$

(b) Si dica (giustificando) se esiste un potenziale vettore $\vec{F}_2$ per $\vec{f}_2$ (1p.)

Esiste perché $\operatorname{div}\vec{f}_2 = 2zye^{xz} - 2zye^{xz} = 0$

(c) In caso la domanda precedente abbia risposta affermativa si dica quanto fa $\int_\gamma \vec{F}_2\cdot d\vec{s}$, dove $\gamma(t) = \frac{1}{2}\cos(t)\vec{\mathbf{i}} + \sin(t)\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, $0 \le t \le 2\pi$.(2p.).

Uso Stokes: $\int_\gamma \vec{F}_2\, d\vec{s} = \iint_B \vec{f}_2\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iint_B \vec{f}_2\cdot\vec{k}\,d\sigma =$

$= \iint_B f_{2,3}\,d\sigma = 0$ perché $\vec{f}_2$ ha componente nulla su $\vec{k}$ $(f_{2,3}=0)$

(d) Si dica quanto fa il flusso di $\vec{f}_2$ attraverso S. (1p.)

Sempre per Stokes:

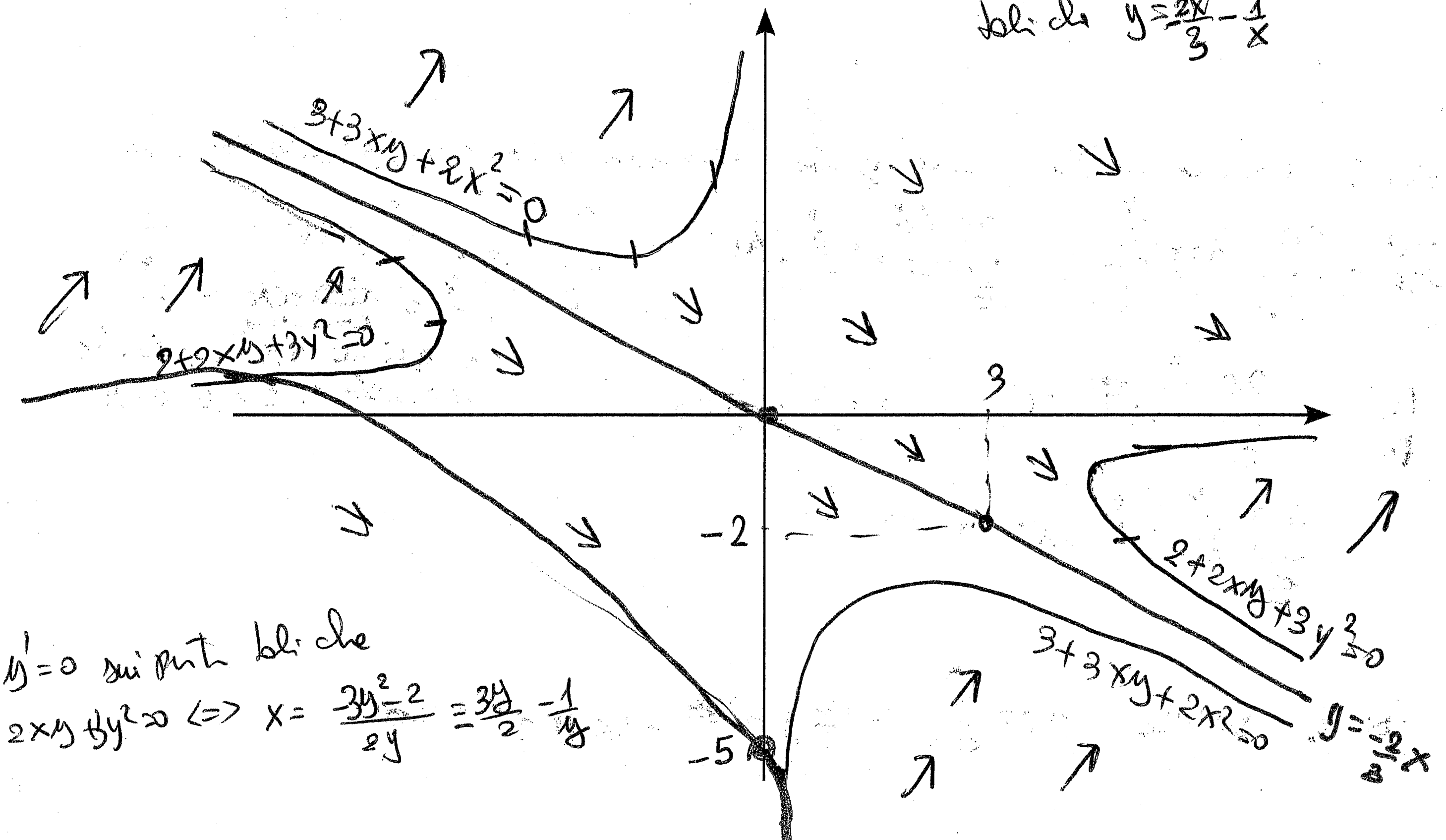
$$\iint_S \vec{f}_2\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \int_\gamma \vec{F}_2\cdot d\vec{s} = \iint_B \vec{f}_2\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = 0$$

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{2+2xy+3y^2}{3+3xy+2x^2}$$

(a) Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).

$y' = \infty$ sui punti (x,y) tali che $y = \frac{2x}{3} - \frac{1}{x}$



$y' = 0$ sui punti tali che $2+2xy+3y^2=0 \iff x = \frac{-3y^2-2}{2y} = -\frac{3y}{2} - \frac{1}{y}$

(b) Si trovi un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x,y) = \lambda(xy)$. Si trovi poi un integrale primo (6p.).

λ deve verificare $\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(xy)(2+2xy+3y^2)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(xy)(3+3xy+2x^2)\right) \iff$

$x\lambda'(xy)(2+2xy+3y^2) + \lambda(xy)(2x+6y) = y\lambda'(xy)(3+3xy+2x^2) + \lambda(xy)(3y+4x)$

$\iff \lambda'(xy)(2x-3y) = \lambda(xy)(2x-3y)$ da cui $\lambda(xy) = k e^{xy}$

(prendo $k=1 \Rightarrow \boxed{\lambda(xy) = e^{xy}.}$ Cerco un potenziale ϕ per il campo $e^{xy}(2+2xy+3y^2)\vec{i} + e^{xy}(3+3xy+2x^2)\vec{j}$.

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = e^{xy}(2+2xy+3y^2) \Rightarrow \phi = \int e^{xy}(2+2xy+3y^2)\,dx =$

$\frac{e^{xy}}{y}(2+3y^2) + \int 2xy e^{xy}\,dx = 2\frac{e^{xy}}{y} + 3ye^{xy} + 2xe^{xy} - \int 2e^{xy}\,dx$

$= \cancel{\frac{2}{y}e^{xy}} + (2x+3y)e^{xy} - \cancel{\frac{2e^{xy}}{y}} + k = (2x+3y)e^{xy} + \text{costante}(y)$

se impongo $\frac{\partial \phi}{\partial y} = e^{xy}(3+3xy+2x^2)$ trovo similmente

$\phi = (2x+3y)e^{xy} + c(x) \implies$

$\underline{\phi(x,y) = (2x+3y)e^{xy} + \text{costante}}$

(c) Si trovi la soluzione $y(x)$ relativa al dato iniziale $(3,-2)$, e se ne riporti il grafico nel diagramma della pagina precedente (1p.)

deve essere $\phi(x,y) = \phi(3,2) = 0$ e quindi

$e^{xy}(2x+3y) = 0 \iff y = -\frac{2}{3}x$ (retta)

(d) Si tracci il grafico qualitativo della soluzione relativa al dato iniziale $(0,-5)$ (motivando il più possibile) (3p.).

La sol. $y(x)$ parte da un pto $(0,-5)$ in cui $y'<0$ e quindi decresce. Per $x>0$ continua a decrescere fino a che non incontra la zona rossa in cui arriva con derivata $-\infty$. Per $x<0$ rimane decrescente fino a che non incontra la curva degli zeri, in cui passa con $y'=0$. Continuando all'indietro diventa crescente e tende a zero per $x \to -\infty$.

4. Si consideri l'equazione differenziale:

$$x^2y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0$$

(a) Tale equazione è (1/2 punto a domanda)
lineare $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$; omogenea $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$; in forma normale $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$.

(b) Si cerchi la soluzione come una serie di potenze $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Seguendo questa idea si trovi una formula ricorsiva per i coefficienti a_n. (4p.).

Se $y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1} = \sum_0^\infty (n+1) a_{n+1} x^n$

$y''(x) = \sum_2^\infty n(n-1) a_n x^{n-2} \Rightarrow x^2 y'' = \sum_2^\infty n(n-1) a_n x^n = \sum_0^\infty n(n-1) a_n x^n$

Imponendo che valga l'equazione $\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n(n-1) a_n - (n+1) a_{n+1} - 6 a_n \right) x^n = 0 \iff$$

$$[n(n-1) - 6] a_n = (n+1) a_{n+1} \quad \forall n \geq 0 \iff$$

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{n^2 - n - 6}{n+1} a_n \quad \forall n \geq 0} \quad (R)$$

(c) Si trovi esplicitamente una soluzione $y(x)$ che verifichi la condizione iniziale $y(0) = 1$. (2p.).

$y(0) = a_0$ quindi $a_0 = 1$. Da (R) con $n=0$

$a_1 = -6 a_0 = -6$. Da (R) con $n = 1$

$a_2 = \frac{1-1-6}{2} a_1 = -3 \cdot -6 = 18$. Da (R) con $n=2$

$a_3 = \frac{4-2-6}{3} a_2 = -\frac{4}{3} \cdot 18 = -24$ Da (R) con $n=3$

$a_4 = \frac{9-3-6}{4} a_3 = 0$. A questo punto (R) $\Rightarrow a_n = 0 \; \forall n \geq 4$

e quindi $y(x) = 1 - 6x + 18x^2 - 24x^3$

(d) Si dica se la soluzione del punto precedente è unica (1p.)

La soluzione è unica dato che i conti fatti sopra individuano univocamente i coeff. a_n $(\forall n \geq 0)$ e quindi $y(x)$

(e) Si provi che le tutte le soluzioni (esprimibili come serie di potenze) sono polinomi di grado tre (1,5p.).

Ragionando come in (c) si vede che (qualunque sia a_0)

$a_4 = \frac{9-3-6}{4} a_3 = 0$. Allora $a_5 = \frac{5^2-5-6}{5} a_4 = 0$

$a_6 = \frac{6^2-6-6}{6} a_5 = 0$ e così via ... $\Rightarrow a_n = 0 \; \forall n \geq 4$

In altri termini $y(x)$ è un polinomio di grado 3