COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 21 luglio 2015 - PARTE A

1. Si scriva l'enunciato del teorema del Dini nel caso di una funzione di due variabili $G(x, y)$. (3p.).

Se (x_0, y_0) è un punto in cui $G(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial y} G(x_0, y_0) \neq 0$, allora esiste una funzione $y = f(x)$ definita in un intorno di x_0 tale che, se (x, y) appartiene a un intorno di (x_0, y_0) si ha

$$G(x, y) = 0 \iff y = f(x)$$

[L'INSIEME $\{G(x,y) = 0\}$ è "localmente" grafico di una $y = f(x)$]

2. Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con raggio di convergenza $R > 0$ dire se e dove la serie converge uniformemente. (3p.)

La serie di potenze converge uniformemente in $[-R', R']$ per ogni $R' < R$.

INOLTRE (non richiesto), la serie non converge in nessuno x con $|x| > R$.

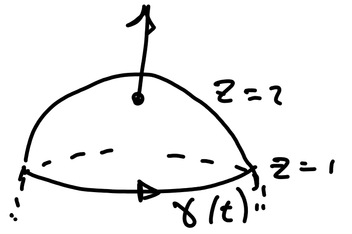
3. Dato il campo $\vec{f}(x, y, z) := (z - y)\vec{\mathbf{i}} + x\vec{\mathbf{j}} + e^{xyz}\vec{\mathbf{k}}$ si calcoli il flusso di $\vec{\nabla} \otimes \vec{f}$ attraverso la calotta sferica $\{x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 1\}$ con normale concorde con l'asse z. (3p.).

La calotta ha un bordo che è descritto dalla curva

$\gamma(t) = \sqrt{3}\cos(t)\vec{i} + \sqrt{3}\sin(t)\vec{j} + \vec{k}$

da cui $\gamma'(t) = -\sqrt{3}\sin(t)\vec{i} + \sqrt{3}\cos(t)\vec{j}$

$0 \leq t \leq 2\pi$



Per Stokes il flusso richiesto è eguale a

$$\int_\gamma \vec f \cdot d\vec s = \int_0^{2\pi} \vec f(\sqrt{3}\cos(t), \sqrt{3}\sin(t), 1) \cdot (-\sqrt{3}\sin(t)\vec i + \sqrt{3}\cos(t)\vec j)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[(1-\sqrt{3}\sin(t))(-\sqrt{3}\sin(t)) + \sqrt{3}\cos(t)\sqrt{3}\cos(t) \right] dt =$$

$$= -\sqrt{3}\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(t)\, dt}_{=0} + 3\int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t))\, dt =$$

$$3\int_0^{2\pi} dt = 6\pi$$

4. Si calcoli l'integrale improprio $\iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\, dxdy$, dove $B := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$, per i valori del parametro $\alpha > 0$ per cui l'integrale converge (3p.).

COORDINATE POLARI $\longrightarrow$ $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{(\rho^2)^\alpha}\rho\, d\rho =$

$2\pi \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}$ $\leftarrow$ CONVERGE SE E SOLO SE $2\alpha - 1 < 1$ CIOÈ $\alpha < 1$

(SE $\alpha < 1$ – SE NO VIENE ∞)

$$= 2\pi \int_0^1 \rho^{1-2\alpha}\, d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{2-2\alpha} = \frac{\pi}{1-\alpha}$$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corretta (1 punto ciascuno)

(a) La curva $\gamma(t) := \cos(t)\vec{\mathbf{i}} + \sin(t)\vec{\mathbf{j}} + t\vec{\mathbf{k}}$ (è un'elica) ha velocità costante. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\cancel{\text{FALSO}}}$

(b) Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^2$ su un aperto Ω in $\mathbb{R}^N$ e sia $x_0 \in \Omega$ punto di massimo relativo per f. Detti $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ gli autovalori della matrice Hessiana di f in x_0, si può affermare che: $\boxed{\lambda_i \geq 0 \quad \forall i}$, $\boxed{\lambda_i > 0 \quad \forall i}$, $\boxed{\cancel{\lambda_i \leq 0} \quad \forall i}$, $\boxed{\lambda_i < 0 \quad \forall i}$, $\boxed{\text{nessuna delle precedenti}}$.

(c) La funzione $f(x,y) := \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ è continua in $(0,0)$. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\cancel{\text{FALSO}}}$

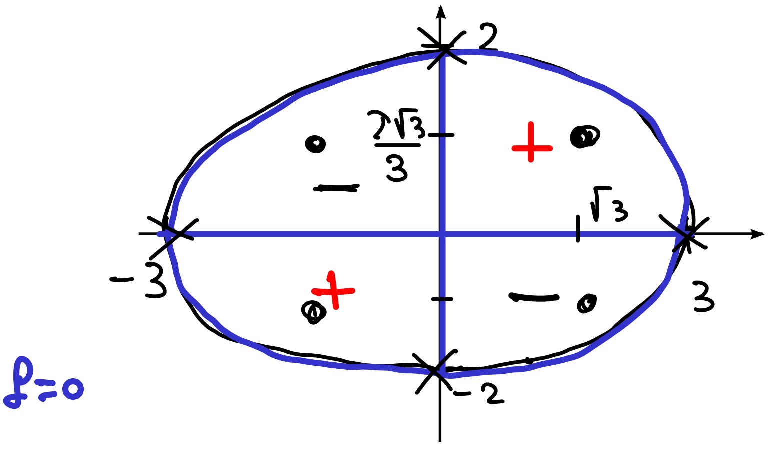
(d) Se $\vec f$ è un campo irrotazionale sull'insieme $\{x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$, allora $\vec f$ ammette un potenziale. $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

PUNTEGGIO MINIMO RICHIESTO=7

Ingegneria Aerospaziale, Compito del 21 luglio 2015 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) := xy\sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$.

(a) Si trovino il dominio di f e le zone in cui $f > 0$, $f = 0$ e $f < 0$. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante.(2p.)



DOMINIO = $4x^2+9x^2 \leq 36$

= ELLISSE CON SEMIASSI 3 e 2.

$f>0 \iff xy>0$

(VEDERE SEGNO SUL DIAGRAMMA)

$f=0$ su $x=0$, $y=0$, $4x^2+9x^2=36$

(b) Si trovino tutti i punti stazionari di f e si riporti la loro posizione nel diagramma. (5p.)

$$\frac{\partial}{\partial x} f = y\sqrt{36-4x^2-9y^2} + \frac{xy(-8x)}{2\sqrt{36-4x^2-9y^2}} = \frac{y(36-4x^2-9y^2-4x^2)}{\sqrt{36-4x^2-9y^2}} = \frac{y(36-8x^2-9y^2)}{\sqrt{36-4x^2-9y^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f = x\sqrt{36-4x^2-9y^2} + \frac{xy(-18y)}{2\sqrt{36-4x^2-9y^2}} = \frac{x(36-4x^2-9y^2-9y^2)}{\sqrt{36-4x^2-9y^2}} = \frac{x(36-8x^2-18y^2)}{\sqrt{36-4x^2-9y^2}}$$

$\Rightarrow$ PTI CRITICI: VARI CASI

a) $\boxed{y=0 \text{ e } x=0}$ b) $y=0$ e $36-8x^2=0 \iff y=0,\ x=\pm 3$

c) $x=0$ e $36-18y^2=0 \iff x=0$ e $y=\pm 2$

d) $\begin{cases} 8x^2+9y^2=36 \\ 4x^2+18y^2=36 \end{cases} \Rightarrow 4x^2-9y^2=0 \Rightarrow y=\pm\frac{2}{3}x$.

Se rimetto $y=\pm\frac{2}{3}x$ nel sistema $\Rightarrow 8x^2+4x^2=36 \iff$ $x^2=3 \iff x=\pm\sqrt{3}$. Dunque trovo $\boxed{\left(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)}$

NOTO CHE I PUNTI TROVATI IN b) e c) NON VANNO BENE perché c'è il denominatore che fa zero.

(c) Si dica se f ammette massimo e minimo e in caso affermativo si trovino tali valori (2p.)

Dato che IL DOMINIO È CHIUSO E LIMITATO f HA MAX/MIN.
DATO CHE SUL BORDO $\{4x^2+36y^2=36\}$ f VALE ZERO
I PUNTI DI MAX/MIN STANNO IN $\{4x^2+36y^2<36\}$ e
DEVONO ESSERE CRITICI. GUARDANDO I SEGNI SI VEDE CHE
$\max f = f(\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$ $\min f = f(\sqrt{3}, -\frac{2}{3}\sqrt{3}) = -4\sqrt{3}$

2. Si consideri il campo di vettori $\vec{f} := \dfrac{x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ (si noti che $\vec{f}$ è radiale).

(a) Si trovi un potenziale per $\vec{f}$ e se ne deduca che $\vec{f}$ è irrotazionale (2p.).

CERCO UN POTENZIALE $F(x,y,z)$. Deve essere

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \Rightarrow F = \int \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx = (x^2 = s)$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{ds}{(s+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{(s+y^2+z^2)^{1/2}} + c(y,z)\right) =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C(y,z)$$

Dato che tutto è simile derivando in y o in z $\Rightarrow$ $C(y,z)$ = costante

e quindi $F(x,y,z) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ è un pot. $\Rightarrow$ $\vec{f}$ conserv. $\Rightarrow \vec{\nabla}\otimes\vec{f} = 0$

(b) Si può dedurre che $\vec{f}$ è conservativo dalla sola osservazione che $\vec{f}$ è irrotazionale? (1p.)

NO! IL DOMINIO DI $\vec{f}$ NON È SEMPLICEMENTE CONNESSO
DUNQUE NON TUTTI I CAMPI IRROTAZIONALI SONO CONSERVATIVI.
(SI POTEVA USARE INVECE IL FATTO CHE $\vec{f}$ È RADIALE)

(c) Si dica se $\vec{f}$ è solenoidale. (2p.)

CALCOLO LA DIVERGENZA DI $\vec{f}$: $\dfrac{\partial}{\partial x} f_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} =$

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x\,\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\,2x}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

. ANALOGAMENTE

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \qquad \frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \Rightarrow$$

(SOMMANDO) $$\vec{\nabla}\cdot\vec{f} = \frac{-2x^2+y^2+z^2+x^2-2y^2+z^2+x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0$$

$\boxed{\vec{f} \text{ È SOLENOIDALE}}$

(d) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la sfera $\{x^2+y^2+z^2=4\}$ (2p.). Per questo calcolo si può usare il teorema della divergenza ? (1p.)

Dato che il versore normale alla sfera è $\hat{\nu}=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\Rightarrow \vec{f}(x,y,z)\cdot\hat{\nu}(x,y,z)=\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}=\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}=\frac{1}{4}$$

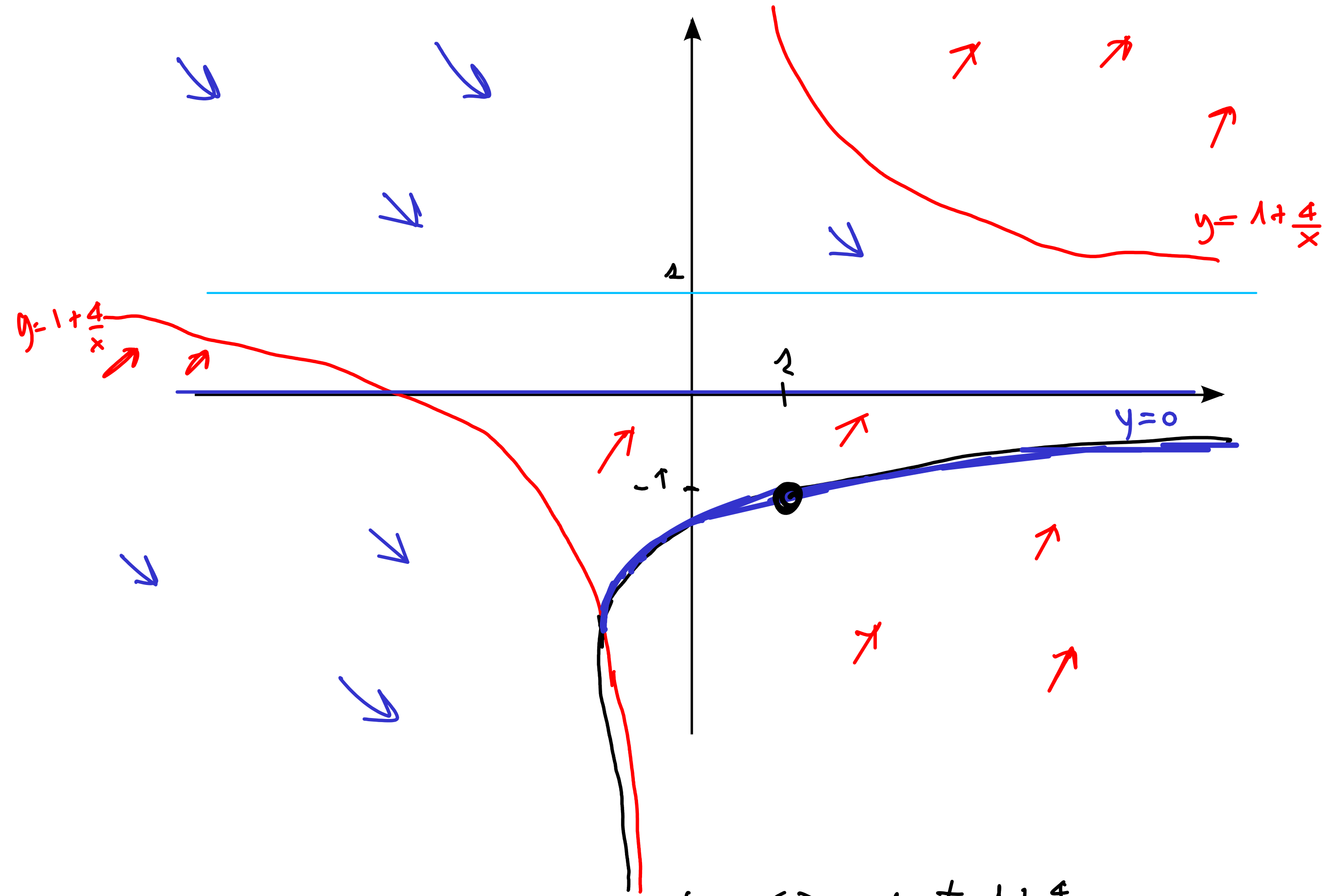
(se (x,y,z) sta sulla sfera) $\Rightarrow$ il flusso vale

$\frac{1}{4}$ Area(sfera) $=\frac{1}{4}\,4\pi=\pi$. NON VALE IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA perché $\vec{f}$ non è definita in zero. Abbiamo visto che $\vec{\nabla}\cdot\vec{f}=0$ (dove è definita) e quindi il suo integrale sarebbe zero.

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'=-\frac{y}{4-xy+x}$$

(a) Si dica per quali (x_0,y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0,y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (2p.).



- VALE CAUCHY DOVE $4-xy+x\neq 0 \iff y\neq 1+\frac{4}{x}$
- $y=0$ SOL. COSTANTE + I SEGNI SONO COME IN FIGURA NELLE REGIONI DELIMITATE DA $\{y=1+\frac{4}{x}\}$ e $\{y=0\}$

(b) Si trovi un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x, y) = \lambda(xy)$. Si trovi poi un integrale primo (4p.).

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(\lambda(xy)\,y\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(\lambda(xy)(4-xy+x)\big) \iff x\lambda'(xy)y + \cancel{\lambda(xy)} =$$

$$y\lambda'(xy)(4-xy+x) + \lambda(xy)(-y+\cancel{1}) \iff \cancel{xy\lambda'(xy)} = \lambda'(xy)(4y - xy^2 + \cancel{xy})$$

$$-\lambda(xy)y \iff 0 = \lambda'(xy)\,\cancel{y}(4-xy) - \cancel{y}\,\lambda(xy) \iff$$

$$\lambda'(xy) = \frac{-\lambda(xy)}{xy-4} \iff \lambda(xy) = \frac{c}{xy-4} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

Posso prendere $\boxed{\lambda(xy) = \frac{1}{xy-4}}$ (o il suo opposto...)

Cerco un int. primo $\phi(x,y)$. Deve essere

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi = \frac{y}{xy-4} \Rightarrow \phi = \ln|xy-4| + c(y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi = \frac{4-xy+x}{xy-4} = -1 + \frac{x}{xy-4} \Rightarrow \phi = -y + \ln|xy-4| + c(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(x,y) = \ln|xy-4| - y + \text{costante}}$$

(c) Si tracci un grafico qualitativo della soluzione $y(x)$ relativa al dato iniziale $(1, -1)$, nel diagramma della pagina precedente (motivando il più possibile) (3p.).

Deve essere $\phi(x,y) = \phi(1,-1) = \ln(5) + 1 =: c > 0$; dunque

$\ln|xy-4| = y + c \iff$ ($xy-4$ è negativo) $4 - xy = e^{y+c}$

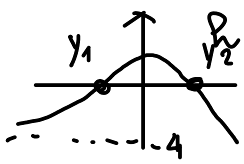
$\iff x = \dfrac{4-e^{y+c}}{y} =: g(y)$. Studio $g(y) \Rightarrow$

$$g(-\infty) = 0, \quad g(0^-) = \frac{4-e^c}{0^-} = \frac{4-5e}{0^-} = +\infty \quad (5e > 4)$$

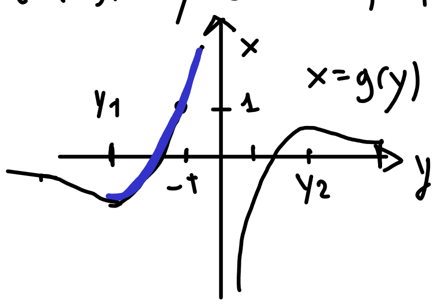
$$g(0^+) = \frac{4-5e}{0^+} = -\infty, \quad g(+\infty) = -\infty, \quad g(-1) = 1.$$

$$g'(y) = \frac{-e^{y+c}y - (4-e^{y+c})}{y^2} = \frac{e^{y+c}(1-y) - 4}{y^2} = \frac{h(y)}{y^2}$$

$$h(-\infty) = -4, \quad h(+\infty) = -\infty, \quad h'(y) = y\,e^{y+c}, \quad h(0) = e^c - 4 = 5e - 4 > 0$$



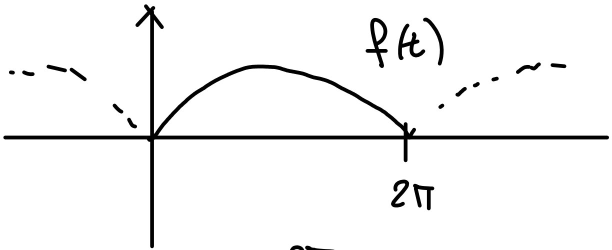
$\Rightarrow$ 2 pti stazionari per g $\Rightarrow$



INVERTO $g(y)$ NEL TRATTO $y_1 < y < 0$ e ricavo $y(x) = g^{-1}(x)$

4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) := \sin(t/2)$ per le t tra 0 e 2π ed estesa in modo da essere 2π periodica.

(a) Si calcolino i coefficienti di Fourier di f. (5p.)



Si vede che f è pari $\Rightarrow$ $b_n = 0 \ \forall n$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(t/2)\,dt = \frac{1}{2\pi}\Big[2\,(-\cos(t/2))\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\big(-\cos(\pi)+\cos(0)\big)$$

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{\pi}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(t/2)\cos(nt)\,dt = \quad \text{(per parti)}$$

$$\frac{1}{\pi}\underbrace{\left[\sin(t/2)\,\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cos(t/2)\sin(nt)\,dt =$$

$$-\frac{1}{2n\pi}\left[\cos\left(\frac{t}{2}\right)\left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{4n^2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos(nt)\,dt =$$

$$\frac{\cos(\pi)-\cos(0)}{2n^2\pi} + \frac{a_n}{4n^2} \iff \left(1-\frac{1}{4n^2}\right)a_n = \frac{-1}{n^2\pi} \iff \boxed{a_n = \frac{-4}{(4n^2-1)\pi}}$$

(b) Si dica se la serie di Fourier converge uniformemente (1p.)

Dato che $|a_n| \simeq \frac{1}{4n^2} \Rightarrow \sum |a_n|$ converge $\Rightarrow$

La serie di Fourier converge unif.

(c) Si usi quanto sopra per calcolare la somma di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$. (2p.)

Calcolo $f(0) = 0 \Rightarrow$

$$0 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\cdot 0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$