COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 30 giugno 2015 - PARTE A

1. Si scriva l'enunciato del teorema di Schwartz (sulle derivate seconde) (3p.).

Se f ammette derivate parziali seconde $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f$ e se tali derivate parziali sono continue in un punto x_0, allora $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$ $i \neq j$ to $1 e N$

(La matrice Hessiana è simmetrica)

2. Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

   (a) si scriva la definizione del raggio di convergenza R delllla serie (1,5p.);

   $$R = 1 \Big/ \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

   (se esiste il limite - se no si mette $\max\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$)

   (b) in generale la serie converge uniformemente nell'insieme $[-R, R]$ $\boxed{\text{SI}}$ $\cancel{\boxed{\text{NO}}}$ (1,5p.)

3. Data la funzione $f(x, y) := \frac{xy}{x^2 + y^2}$ per $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) := 0$, di dica:

   (a) se f è continua in $(0, 0)$ $\boxed{\text{SI}}$ $\cancel{\boxed{\text{NO}}}$ (1p.);

   (b) quanto fanno (1p.);

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \underline{\quad 0 \quad} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \underline{\quad 0 \quad} \qquad \boxed{\text{non esistono}};$$

   (c) se f è differenziabile in $(0, 0)$ $\boxed{\text{SI}}$ $\cancel{\boxed{\text{NO}}}$ (1p.).

4. Data la superficie $S := \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ con normale che punta verso l'esterno (rispetto all'origine) e dato il campo $\vec{F}(x, y, z) := y\vec{\mathbf{i}} - x\vec{\mathbf{j}} + e^{xyz}\vec{\mathbf{k}}$, si calcoli il flusso di $\vec{\nabla} \otimes \vec{F}$ attraverso S (3p.).

per Stokes posso porre a $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = (*)$ dove

$\gamma(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}\ (+ 0\vec{k})$, da cui

$\gamma'(t) = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}$ e

$$(*) = \int^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (\sin(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + e^0\vec{k}) \cdot (-\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j})\, dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (-\sin^2(t) - \cos^2(t))\, dt = -\int_0^{2\pi} 1\, dt = -2\pi$$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando la casella corrispondene alla risposta corretta (1 punto ciascuno) (**O** indica l'origine).

(a) Se una curva $\gamma(t)$ ha modulo costante allora la sua derivata $\gamma'(t)$
$\boxed{\text{ha modulo costante}}$, $\boxed{\text{è nulla}}$, $\boxed{\text{è parallela a } \overrightarrow{\gamma(t) - \mathbf{O}}}$, $\boxed{\cancel{\text{è perpendicolare a } \overrightarrow{\gamma(t) - \mathbf{O}}}}$

(b) L'insieme $M := \{(x, y) : x^2 - y^2 = 1\}$ è limitato in $\mathbb{R}^2$. $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\cancel{\text{FALSO}}}$

(c) La funzione $f(x, y, z) := \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ è integrabile in senso improprio sull'insieme $B := \{x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$ (complementare del disco unitario). $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\cancel{\text{FALSO}}}$

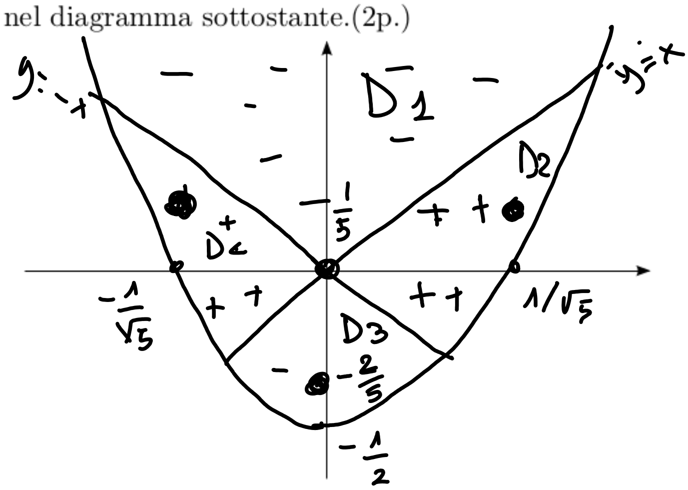
(d) Se $\vec{f}$ è un campo irrotazionale sull'insieme $\Omega := \{(x, y) : y \neq 0\}$, allora $\vec{f}$ è sicuramente conservativo in Ω. $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$

PUNTEGGIO MINIMO RICHIESTO=7

Ing. Aerospaziale, Analisi 2, 30/6/15 - PARTE B Cognome/Nome:

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x, y) := (x^2 - y^2)\sqrt{2y + 1 - 5x^2}$.

   (a) Si trovino il dominio di f e le zone in cui $f > 0$, $f = 0$ e $f < 0$. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante.(2p.)



Dominio = D = $\{2y+1-5x^2 \geq 0\}$ = $\left\{ y \geq \frac{5x^2-1}{2} \right\}$

$f > 0 \iff x^2 - y^2 > 0$

$\iff -x < y < x$ per $x > 0$

$x < y < -x$ per $x < 0$

   (b) Si trovino tutti i punti stazionari di f e si riporti la loro posizione nel diagramma. (4p.)

$$D_x f = 2x\sqrt{2y+1-5x^2} - \frac{10x(x^2-y^2)}{2\sqrt{2y+1-5x^2}} = \frac{2(2y+1-5x^2) - 5(x^2-y^2)}{\sqrt{2y+1-5x^2}}\, x$$

$$D_y f = -2y\sqrt{2y+1-5x^2} + \frac{2(x^2-y^2)}{2\sqrt{2y+1-5x^2}} = \frac{-2y(2y+1-5x^2) + (x^2-y^2)}{\sqrt{2y+1-5x^2}}$$

Da $D_x f = 0$ si ha $\boxed{x=0}$ oppure $2(2y+1-5x^2) = 5(x^2-y^2)$

La seconda condizione, messa in $D_y f = 0$, dà

$-y \cdot 5(x^2-y^2) + (x^2-y^2) \iff \boxed{y = 1/5}$ [NOTA CHE $x^2-y^2=0$

corrisponde a $2y+1-5x^2=0$ che dà punti sul bordo del d

Se $\underline{x=0}$ si trova $-2y(2y+1) - y^2 = 0 \iff \boxed{y=0}$ oppure

$-2(2y+1) - y = 0 \iff -5y-2=0 \iff \boxed{y = -\frac{2}{5}}$

Se $\underline{y = 1/5} \Rightarrow 2\left(\frac{2}{5} + 1 - 5x^2\right) = 5\left(x^2 - \frac{1}{25}\right)$

$\iff \frac{4}{5} + 2 - 10x^2 = 5x^2 - \frac{1}{5} \iff 3 = 15x^2 \iff \boxed{x = \pm 1/\sqrt{5}}$

$\Rightarrow$ 4 PTI STAZ. $(0,0)$ $(0,-2/5)$ $(\pm\sqrt{5}/5, 1/5)$

(c) Si dica se i punti trovati sono di massimo relativo o assoluto, oppure di sella. Non è necessario usare le derivate seconde, si suggerisce di usare il diagramma sopra (3p.)

Dallo studio dei segni si vede che $(0,0)$ è di sella

$(0,-2/3)$ è di minimo su $D_2 \Rightarrow$ pto di min. rel.

NON È MIN. ASSOLUTO PERCHÉ IN D_1 la $f<0$ e va a $-\infty$

$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right)$ sono di max su $D_1/D_3 \Rightarrow$ pti di max. assoluto

2. Si considerino il campo di vettori $\vec{F} := (z(x^3+y^3)+e^{yz})\vec{\mathbf{i}} - (z(x^3-y^3)+e^{xz})\vec{\mathbf{j}} - (z^2-1)(x^2+y^2)\vec{\mathbf{k}}$ e le tre superfici sottoindicate, tutte con normale concorde con il versore $\vec{\mathbf{k}}$,

$$B_0 := \{x^2+y^2 \le 1, z=0\}, \quad B_1 := \left\{x^2+y^2 \le \frac{1}{4}, z=1\right\}, \quad S := \left\{x^2+y^2 = \frac{1}{(z+1)^2}, 0 \le z \le 1\right\}.$$

Si calcolino i flussi di $\vec{F}$ su B_0, B_1 e S. (8p.)

$$\text{FLUSSO}(B_0) = \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} F(x,y,0)\cdot\vec{k}\,dx\,dy = \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} (x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$(\text{coord. polari}) = 2\pi\int_0^1 \rho^2\cdot\rho\,d\rho = 2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{FLUSSO}(B_1) = \iint_{\{x^2+y^2\le 1/4\}} F(x,y,1)\cdot\vec{k}\,dx\,dy = \iint_{\{x^2+y^2\le 1/4\}} \underbrace{F_3(x,y,0)}_{\text{FA ZERO}}\,dx\,dy = \boxed{0}$$

Poniamo $D = \left\{x^2+y^2 \le \frac{1}{(z+1)^2}, 0 \le z \le 1\right\} \Rightarrow \partial D = (-B_0)\cup(B_1)\cup S$.

$$\text{FLUSSO}(\partial D) = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \iiint_D z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\int_0^1 z\,dz \iint_{\{x^2+y^2\le 1/(z+1)^2\}} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 z\,dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/z+1} \rho^2\cdot\rho\,d\rho =$$

$$2\pi\int_0^1 z\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{1/z+1} dz = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{z}{(z+1)^4}\,dz = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{(z+1)^3} - \frac{1}{(z+1)^4}\right) dz =$$

$$\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(z+1)^3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{24}$$

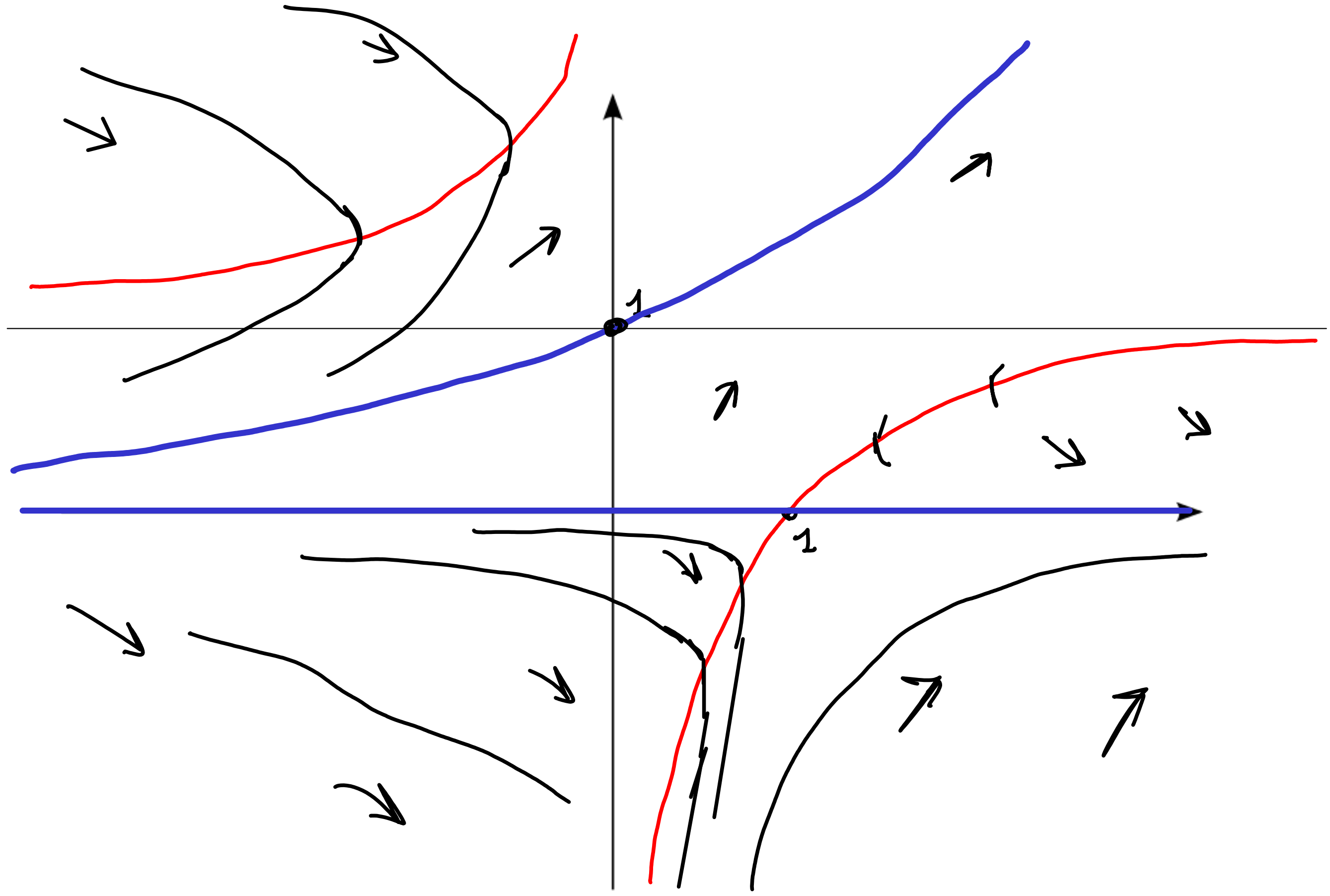
$$\Rightarrow \text{FLUSSO}(S) = \text{FLUSSO}(D) - \text{FLUSSO}(B_1) + \text{FLUSSO}(B_0) = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{13}{24}\pi}$$

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y}{1+xy-x}$$

(a) Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (2p.).

Vale Cauchy dove $1+xy-x\neq 0 \iff y\neq \frac{x-1}{x} = 1-\frac{1}{x}$.
$y=0$ è l'unica sol. costante. La monotonia è come indicata nel disegno



(b) Si trovi un fattore integrante per l'equazione per l'equazione della forma $\lambda(x,y)=\lambda(xy)$. Si trovi poi un integrale primo (5p.).

$$D_y\big(\lambda(xy)(-y)\big) = D_x\big(\lambda(xy)(1+xy-x)\big) \iff -y\cancel{x\lambda'(xy)}$$

$$-\lambda(\cancel{xy}) = y\lambda'(xy)(1+xy-\cancel{x}) + \lambda(xy)(y-\cancel{1}) \iff$$

$$0 = y\lambda'(xy)(1+xy) + y\lambda(xy) \iff \lambda'(xy) = -\frac{\lambda(xy)}{1+xy}$$

$$\Rightarrow \lambda(xy) = \frac{-c}{1+xy}$$ prendo $c=1$. Cerco $\phi(x,y)$:

$$D_x\phi = \frac{-y}{1+xy} \iff \phi = -\ln(1+xy)+c(y)$$

$$D_y\phi = \frac{1+xy-x}{1+xy} = 1-\frac{x}{1+xy} \iff \phi = y-\ln(1+xy)+c(x)$$

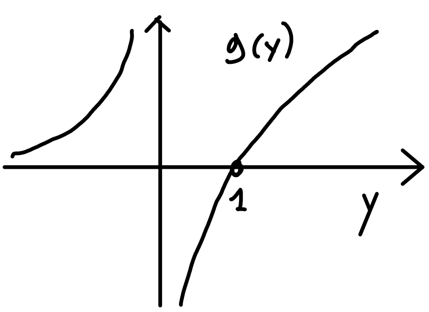
DUNQUE $\phi(x,y) = \boxed{y-\ln(1+xy)}$

(c) Si consideri la $y(x)$ relativa al dato iniziale $(0, 1)$ e si trovino $\underline{x}$, $\overline{x}$ estremi dell'intervallo massimale di esistenza di $y(x)$ e $\underline{y}$ e $\overline{y}$, rispettivamente i limiti di $y(x)$ a tali estremi. Usando queste informazioni si tracci un grafico qualitativo di $y(x)$ nel diagramma della pagina precedente (3p.).

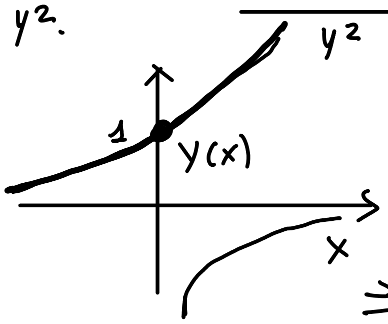
Deve essere $\phi(x, y(x)) = c$. Se metto $x=0 \Rightarrow \phi(0,1) = c \Rightarrow$ $c = 1$ e quindi $y - \ln(1+xy) = 1 \iff y - 1 = \ln(1+xy)$ $\iff 1+xy = e^{y-1} \iff x = \frac{e^{y-1}-1}{y}$ $(= g(y))$. Studio $g(y)$:

Dominio $= y \neq 0$. $g(-\infty) = 0$ $\quad g(0^-) = \frac{e^{-1}-1}{0^-} = +\infty$, $g(0^+) = \frac{e^{-1}-1}{0^+} = -\infty$

$g(+\infty) = +\infty$. $\quad g'(y) = \frac{e^{y-1}y - e^{y}+1}{y^2} = \frac{e^{y-1}(y-1)+1}{y^2}$. Noto che posto



$\Rightarrow$



$h(t) = e^t t + 1$ si ha
$h'(t) = e^t(t+1)$ che fa 0 in $t = -1$, pto di minimo, e
$h(-1) = -\frac{1}{e} + 1 > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$ $\forall x$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \underline{x} = -\infty, \ \underline{y} = 0 \\ \overline{x} = +\infty \ \ \overline{y} = +\infty \end{array}}$$

4. Si consideri la serie di potenze $f(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 - n}$

(a) Si trovi il raggio di convergenza R della serie. (1p.)

$$R = \lim_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2-n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n-1} = 1 \cdot 1 = 1$$

(b) Si dica se la serie converge uniformemente su $[-R, R]$. (2p.)

Sia $M_n = \max_{[-1,1]} \frac{x^n}{n^2-n} = \frac{1}{n(n-1)}$. Dato che $\sum_{n=2}^{\infty} M_n < +\infty$

$\Rightarrow$ la serie di potenze conv. Totalmente su $[-1, 1]$

$\Rightarrow$ la serie conv. unif. su $[-1, 1]$

(c) Si mostri che f verifica $f''(x) = \frac{1}{1-x}$ e se ne ricavi che $f(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$. (4p.)

Derivando sotto il segno di serie: (se $|x|<1$)

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\, x^{n-1}}{n^2 - n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)\, x^{n-2}}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$= $ (serie geometrica) $\frac{1}{1-x}$.

Inoltre $\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln(1-x) + c$

e $\int \left(-\ln(1-x) + c\right) dx = $ (per parti)

$$-x\ln(1-x) - \int \frac{x \overbrace{+1-1}}{1-x}\,dx + cx + d =$$

$$-x\ln(1-x) + \int \left(1 - \frac{1}{1-x}\right) dx + cx + d =$$

$$-x\ln(1-x) + x + \ln(1-x) + cx + d$$

DUNQUE $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 - n} = (1-x)\ln(1-x) + x + cx + d$

Dato che $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$ (perché $a_0 = 0$, $a_1 = 0$)

$\Rightarrow c = d = 0$.