COGNOME:												
NOME:												
MATR.:												

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 9 giugno 2015 - PARTE A

1. Si scriva l'enunciato del teorema del differenziale totale (3p.).

Se f ha derivate parziali $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$ per tutte le x di un intorno di x_0 e se le derivate parziali sono continue in x_0, allora f è differenziabile in x_0

2. Si scriva la definizione di convergenza totale per una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ su un insieme A e si dica che relazione c'è tra convergenza totale e convergenza uniforme (3p.).

$\sum_n f_n$ si dice totalmente convergente su A se la serie numerica $\sum_n \sup_{x \in A} |f_n(x)|$ è convergente.

La convergenza totale IMPLICA la convergenza uniforme della serie (il viceversa non vale)

3. Si calcoli la lunghezza della curva $\gamma(t) := 2\sin(t)\vec{\mathbf{i}} - 2\cos(t)\vec{\mathbf{j}} + t\vec{\mathbf{k}}$ per $0 \le t \le \pi$ (3p.).

Si ha $\gamma'(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\sin(t)\vec{j} + \vec{k}$

e quindi $\ell(\gamma) = \int_0^{\pi} \sqrt{\gamma'(t)^2}\, dt =$

$$\int_0^\pi \sqrt{\underbrace{4\cos^2(t)+4\sin^2(t)}_{=4}+1}\,dt = \int_0^\pi \sqrt{5}\,dt = \sqrt{5}\,\pi$$

4. Si dica se il campo $\vec{f}(x,y,z) := \frac{1}{y^2}(yz\vec{\mathbf{i}} - xz\vec{\mathbf{j}} + xy\vec{\mathbf{k}})$ è conservativo (3p.).

$\frac{\partial}{\partial y} f_1 = \frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{y} = -\frac{z}{y^2}$ $\qquad \frac{\partial}{\partial x} f_2 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{-xz}{y^2} = \frac{-z}{y}$ $\qquad$ TORNA

$\frac{\partial}{\partial z} f_1 = \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{y} = \frac{1}{y}$ $\qquad \frac{\partial}{\partial x} f_3 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{y} = \frac{1}{y}$ $\qquad$ TORNA

$\frac{\partial}{\partial z} f_2 = \frac{\partial}{\partial z}\frac{-xz}{y^2} = -\frac{x}{y^2}$ $\qquad \frac{\partial}{\partial y} f_3 = \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{y} = -\frac{x}{y^2}$ $\qquad$ TORNA

$\Rightarrow \vec{f}$ è irrotazionale. Dato che $\vec{f}$ è definito su

$\{y \neq 0\} = \{y>0\} \cup \{y<0\}$ CHE È SEMPLICEMENTE CONNESSO

CONVESSI DISGIUNTI $\qquad \Rightarrow \vec{f}$ È CONSERVATIVO

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando una delle caselle (1 punto ciascuno).

(a) La funzione $f(x,y,z) := \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$ ha minimo sul disco unitario $B := \{x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.
~~VERO~~ FALSO

(b) Se R è il raggio di convergenza di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, allora la serie converge puntualmente per ogni x tale che $-R \leq x \leq R$. VERO ~~FALSO~~

(c) La funzione $f(x,y,z) := \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$ è integrabile in senso improprio sul disco unitario $B := \{x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$. ~~VERO~~ FALSO

(d) Se $\vec{f}$ è un campo solenoidale su un dominio D, allora $\iint_{\partial D} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = 0$. ~~VERO~~ FALSO

PUNTEGGIO MINIMO RICHIESTO=7

1. Si consideri la funzione di due variabili $f(x,y) := x^2 + 3y^2 - 2xy^3$.

(a) Si trovino tutti i punti stazionari di f e per ognuno di questi si dica se sono punti di massimo relativo/minimo relativo/sella (5p.).

$$\frac{\partial}{\partial x} f = 2x - 2y^3 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla f = 0 \iff \begin{cases} x = y^3 \\ y(1-xy) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f = 6y - 6xy^2$$

$\Rightarrow y = 0$ OPPURE $1 = y^4 \iff y = +/- 1 \; (\Rightarrow x = +/- 1)$

DUNQUE HO TRE PUNTI: $\boxed{(0,0) \text{ e } \pm(1,1)}$. CALCOLO LE DERIVATE SECONDE:

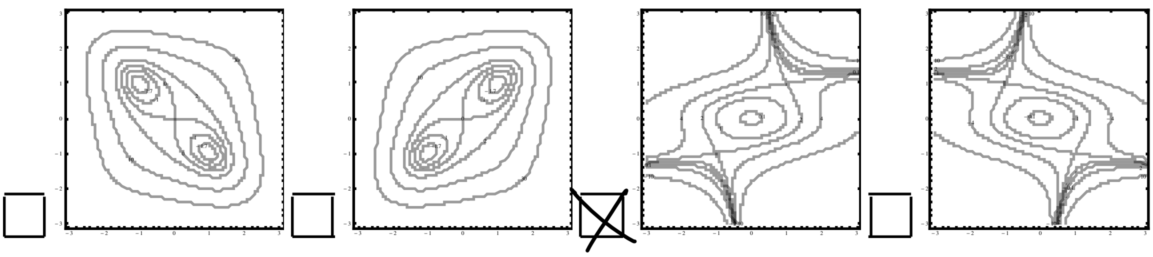
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6 - 12xy$$. DUNQUE

$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \to \det = 12 > 0$, traccia $> 0 \Rightarrow \boxed{(0,0) \text{ MINIMO}}$

$Hf(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} \to \det = -12 - 36 < 0 \Rightarrow \boxed{(1,1) \text{ SELLA}}$

(e lo stesso vale per $(-1,-1)$)

(b) Quale dei seguenti diagrammi è plausibile che indichi le linee di livello di f?(1p.)



(c) Si dica se l'insieme $M := \{(x,y) : f(x,y) = 1\}$ è descritto localmente da una curva regolare (2p.).

Sì perché nei punti di M si ha $\nabla f \neq 0$. Infatti $\nabla f = 0$ nei tre punti trovati sopra e nessuno di loro è in M. Infatti $f(0,0) = 0 \neq 1$, $f(1,1) = 2 \neq 1$.

La tesi segue allora dal teorema del Dini

(d) Si dica se l'insieme M del punto precedente è limitato (1p.). NON È LIMITATO.

Infatti $(x,y) \in M \Leftrightarrow x^2 - 2y^3x + 3y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$ (eq. di II° grado in x)

$\frac{\Delta}{4} = y^6 + 1 - 3y^2 > 0$ e $x = y^3 \pm \sqrt{y^6 + 1 - 3y^2}$. QUESTO È POSSIBILE per tutti gli y grandi e quindi trovo punti $(x,y) \in M$ con y grande a piacere.

2. Si consideri il campo di vettori $\vec{F} := (yz + y^3z - z^3)\vec{\mathbf{i}} + (xz - x^3z - e^{yz})\vec{\mathbf{j}} + xy\vec{\mathbf{k}}$.

(a) Si calcoli $\vec{f} := \vec{\nabla} \otimes \vec{F}$ (il rotore di $\vec{F}$) (1p.).

$$\vec{\nabla} \otimes \vec{F} = \det \begin{bmatrix} i & D_x & yz + y^3z - z^3 \\ j & D_y & xz - x^3z - e^{yz} \\ k & D_z & xy \end{bmatrix} = \vec{i}\left(x - (x - x^3 - ye^{yz})\right) + $$
$$- \vec{j}\left(y - (y + y^3 - 3z^2)\right) +$$
$$+ \vec{k}\left(z - 3x^2z - (z + 3y^2z)\right) = \boxed{(x^3 + ye^{yz})\vec{i} + (y^3 - 3z^2)\vec{j} - 3z(x^2+y^2)\vec{k}}$$

(b) Si usi il Teorema di Stokes per calcolare $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$, dove $\gamma(t) = \cos(t)\vec{\mathbf{i}} + \sin(t)\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}$, per $0 \le t \le 2\pi$ (4p.).

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_D \vec{f} \cdot \hat{\nu} \, d\sigma$$ dove $D = \{x^2 + y^2 \le 1, z = 1\}$ e $\hat{\nu} = \vec{k}$ perché γ gira in verso antiorario

$$= \iint_B f_3(x,y,1)\, dx\, dy$$ dove $B = \{x^2 + y^2 \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$

$$= \iint_B -3(x^2+y^2)\, dx\, dy = -3\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2 \cdot \rho \, d\rho = -3 \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{3\pi}{2}$$

(c) Si calcoli $\iint_{\partial Q} \vec{F} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma$, dove $Q := \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$ (3p.).

$$\iint_{\partial Q} \vec{F} \cdot \hat{\nu}\, d\sigma = \iiint_Q \operatorname{div}(\vec{F})\, dx\, dy\, dz = \iiint_Q -ze^{yz}\, dx\, dy\, dz =$$
$$-\underbrace{\int_0^1 dx}_{=1} \int_0^1 dz \int_0^1 ze^{yz}\, dy = -\int_0^1 dz \left[e^{yz}\right]_{y=0}^{y=1} = -\int_0^1 (e^z - 1)\, dz$$
$$= -\left[e^z - z\right]_0^1 = -\left(e^1 - e^0 - 1 + 0\right) = \boxed{2 - e}$$

(d) Si dica se $\vec{f}$ è conservativo (1p.). $\boxed{\text{NON È CONSERVATIVO}}$ BASTA NOTARE

che $\frac{\partial f_1}{\partial y} = e^{yz} + yze^{yz}$

NON SONO EGUALI

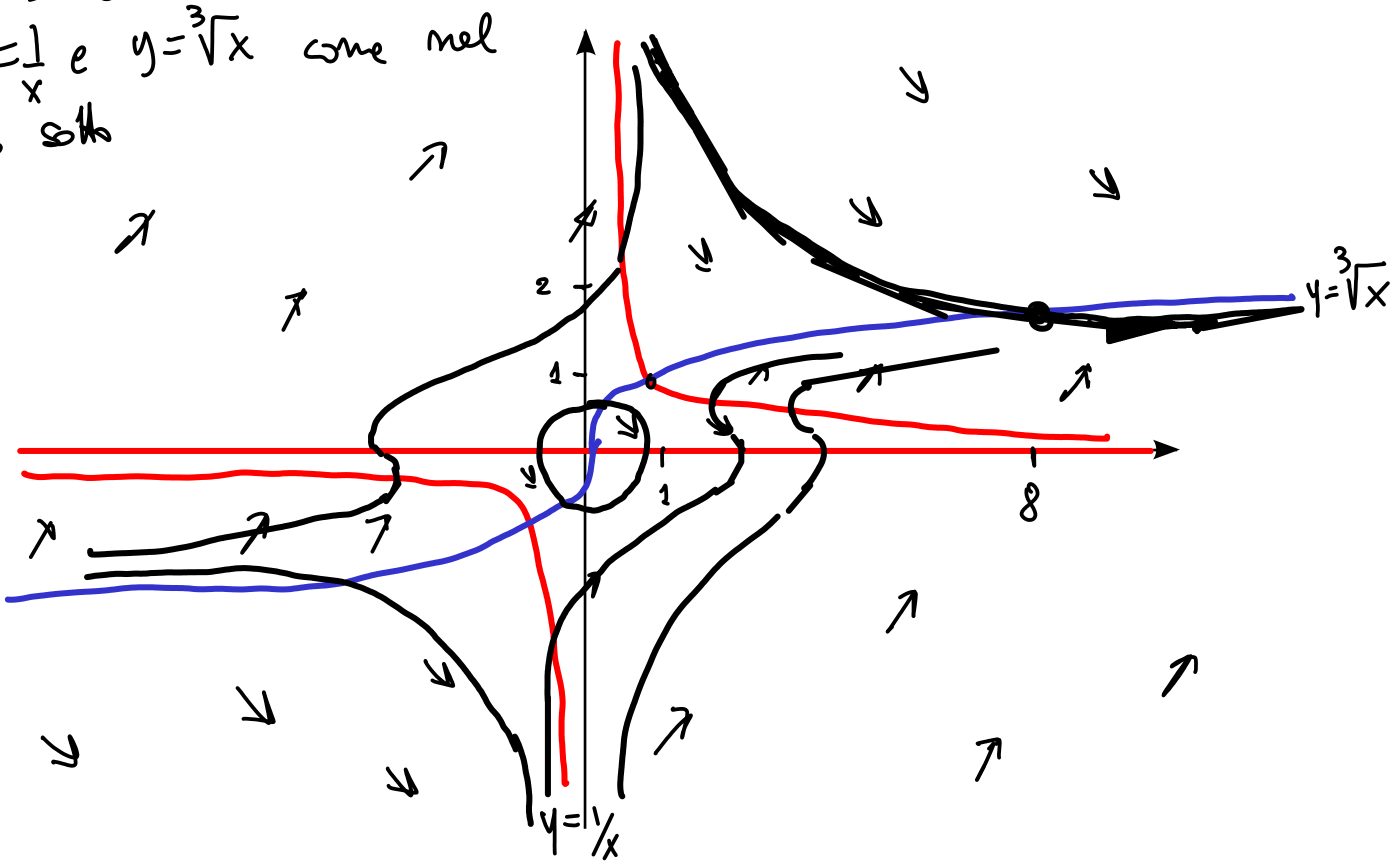
$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$

3. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y^3 - x}{3y(1 - xy)}, \qquad y(x_0) = y_0.$$

(a) Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino le eventuali soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (2p.).

Vale Cauchy dove $y(1-xy) \neq 0$. $\to$ FUORI DA $y=0$ e da $y=\frac{1}{x}$.
Non ci sono sol. costanti. La monotonia dipende dalle curve $y=0$, $y=\frac{1}{x}$ e $y=\sqrt[3]{x}$ come nel disegno sotto



(b) Si trovi un integrale primo per l'equazione (3p.).

Il camp $\vec{f} = (x - y^3)\vec{i} + 3y(1-xy)\vec{j}$ è già conservativo (non servono fattori integranti) dato che $\frac{\partial}{\partial y}(x - y^3) = -3y^2$ $\frac{\partial}{\partial x}(3y - 3xy^2) = -3y^2$. Se ϕ è un potenziale deve essere

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x - y^3 \iff \phi = \frac{x^2}{2} - xy^3 + c(y)$. Derivando in y trovo $\frac{\partial}{\partial y}\phi = -3xy^2 + c'(y)$ che deve fare $3y - 3xy^2 \iff c' = 3y$ cioè $c(y) = \frac{3}{2}y^2$. In definitiva $\phi(x,y) = \frac{x^2 + 3y^2 - 2xy^3}{2}$.

(c) Si consideri la $y(x)$ relativa al dato iniziale $(8, 2)$ e si trovino $\underline{x}$, $\overline{x}$ estremi dell'intervallo massimale di esistenza di $y(x)$ e $\underline{y}$ e $\overline{y}$, rispettivamente i limiti di $y(x)$ a tali estremi. Usando queste informazioni si tracci un grafico qualitativo di $y(x)$ nel diagramma della pagina precedente (3p.).

Se prendo $x > 8$ $y(x)$ cresce e non può più passare per $y=\sqrt[3]{x}$.
DUNQUE $\boxed{\overline{x}=+\infty}$ e $\overline{y}\in\,]2,+\infty]$. DICO CHE $\boxed{\overline{y}=+\infty}$. Se fosse $\overline{y}\in\mathbb{R}$
$\Rightarrow = \lim_{x\to+\infty}\phi(x,y(x)) = \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to\overline{y}}} \frac{x^2+3y^2-2xy^3}{2} = +\infty$ (VINCE x^2) $\Rightarrow$ IMPOSSIBILE

Se $x<8$ $y(x)$ decresce e non può incontrare $y=1/x$. $\Rightarrow \underline{x}\in[0,2[$ e
$\boxed{\underline{y}=+\infty}$. Dico che $\boxed{\underline{x}=0}$. Se no avrei $c=\lim_{x\to\underline{x}}\phi(x,y(x)) =$
$\lim_{x\to\underline{x},\, y\to+\infty} \frac{x^2+3y^2-2xy^3}{2} = -\infty$ (VINCE y^3) IMPOSSIBILE

4. Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(t)=t^2$ per $0\le t\le\pi$ e $f(t)=-t^2$ per $-\pi<t\le 0$, ed estesa a $\mathbb{R}$ in modo da essere 2π-periodica.

(a) Si calcolino i coefficienti della serie di Fourier di f (4p.).

f è dispari $\Rightarrow a_n=0\ \forall n$ e $b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\sin(nt)$

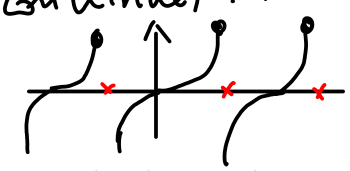
$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^2(-\cos(nt))}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} 2t\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{n}\cos(n\pi)$

$+ \frac{4}{n\pi}\underbrace{\left[\frac{t\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt = \frac{2\pi}{n}(-1)^n - \frac{4}{n^2\pi}\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi}$

$= \frac{2\pi}{n}(-1)^n + \frac{4}{n^3\pi}\left(\cos(n\pi)-1\right) = \frac{2\pi}{n}(-1)^n + \frac{4}{n^3\pi}\left((-1)^n-1\right)$

(b) Si dica se la serie di Fourier trovata sopra converge uniformemente a f (2p.).

$\boxed{\text{NON CONVERGE UNIF.}}$ SE LO FACESSE $\Rightarrow$ $f(t)$ sarebbe continua (somma uniforme di continue). Ma f non è continua in π (e in $\pi+2k\pi$)



(c) Si dica (motivando) per quali x la serie di Fourier converge puntualmente a f in x (2p.).

Dato che f è regolare a tratti la serie converge puntualmente nelle x in cui f è continua e cioè nelle $\boxed{x\neq\pi+2k\pi}$
Nelle $x=\pi+2k\pi$ la serie converge a zero (media tra limite dx e limite sx) che è $\neq$ da $f(\pi+2k\pi)=\pi^2$