COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 3 giugno 2015

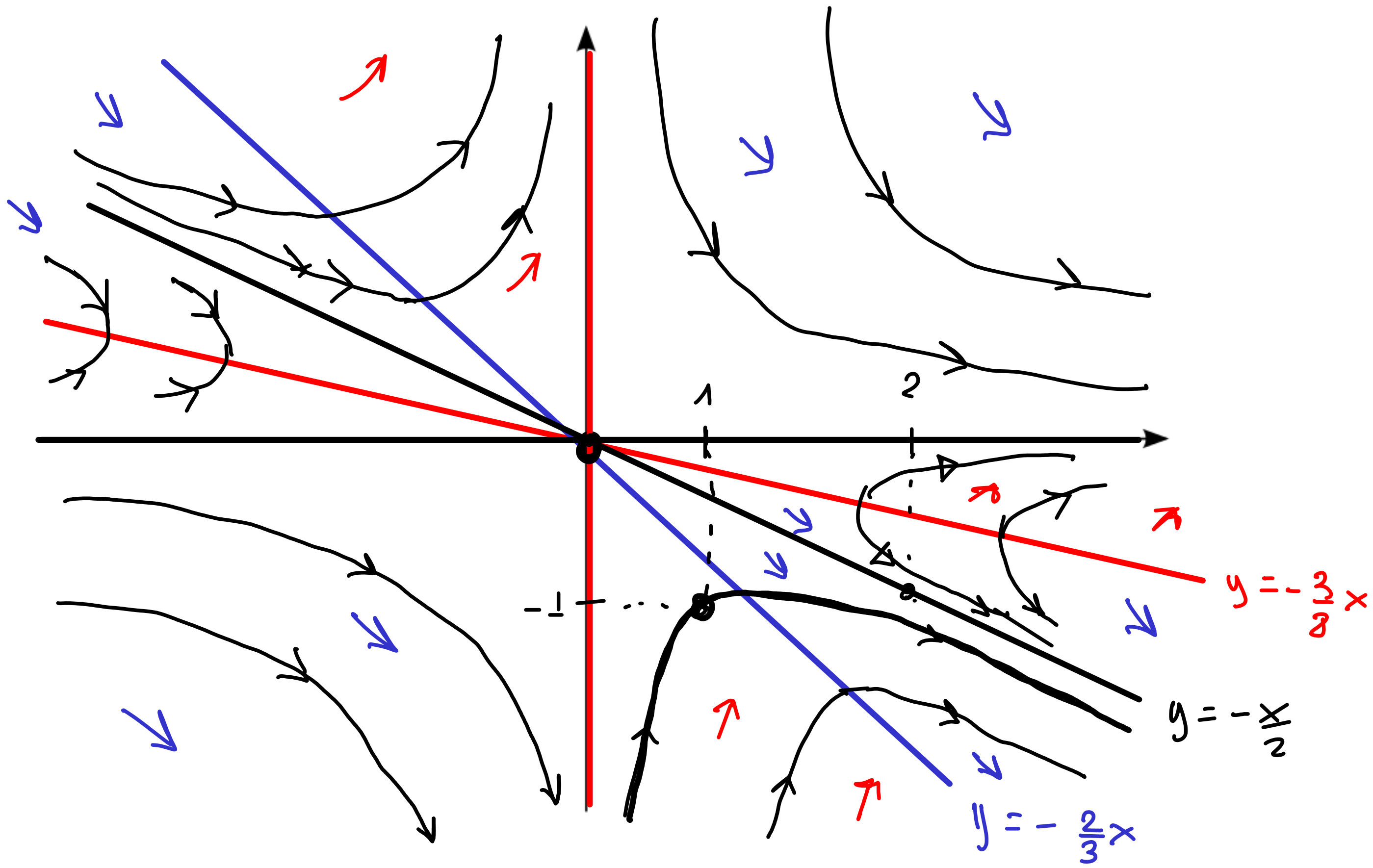
1. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{4xy + 6y^2}{8xy + 3x^2}, \qquad y(x_0) = y_0.$$

(a) Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy (1p.). Si trovino le soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).

· Il teorema di Cauchy vale se $x(8y+3x)=0$

· Il segno del termine destro si vede fattorizzando come $\dfrac{-2y(2x+3y)}{x(8x+3y)}$. $y=0$ è soluzione costante.



(b) Si trovino un fattore integrante per l'equazione, avente la forma $\lambda(x, y) = \lambda(xy)$ e successivamente un integrale primo (5p.).

$$D_y\left[\lambda(xy)(4xy+6y^2)\right] = D_x\left[\lambda(xy)(8xy+3x^2)\right] \Leftrightarrow$$

$$x\lambda'(xy)(4xy+6y^2)+\lambda(xy)(4x+12y) = y\lambda'(xy)(8xy+3x^2)+\lambda(xy)(8y+6x)$$
$$\Updownarrow$$
$$xy\lambda'(xy)(4x+6y-8y-3x) = \lambda(xy)(-4x-12y+8y+6x) \iff$$
$$xy\lambda'(xy)(x-2y) = \lambda(xy)(-4y+2x) \iff xy\lambda'(xy) = 2\lambda(xy)$$
$\Rightarrow \lambda(xy) = (xy)^2\cdot c$ (PRENDO $c=1$ $\rightarrow$ $\boxed{\lambda(xy) = x^2y^2}$

L'integrale primo ϕ deve verificare

$D_x\phi = 4x^3y^3+6x^2y^4$; $D_y\phi = 8x^3y^3+3x^4y^2$. Ne segue

$\phi = x^4y^3+2x^3y^4+c(y)$; $\phi = 2x^3y^4+x^4y^3+d(x)$

$$\Updownarrow$$

$$\phi(x,y) = x^4y^3+2x^3y^4+c = \boxed{x^3y^3(x+2y)+c}$$

(c) Si trovi un'espressione per la soluzione che parte da $(2,-1)$ e se ne tracci il grafico (1p.).

Se calcolo $\phi(2,-1)$ trovo 0 $\Rightarrow$ la sol. verifica $x^3y^3(x+2y)=0$

e quindi $\boxed{y(x) = -\frac{x}{2}}$

(d) Si tracci il grafico della soluzione che parte da $(1,-1)$ (1p.); si dica quali sono l'intervallo massimale di esistenza e i limiti di $y(x)$ agli estremi di tale intervallo (2p.).

Dall'esame dei grafici si vede che, partendo da $(1,-1)$, deve essere $\underline{x}\geq 0$, $\underline{y} = -\infty$, $\overline{x} = +\infty$ e $\overline{y} = -\infty$ (gli ultimi due fatti seguono da $y(x)\leq -\frac{x}{2}$). Dato che $\frac{F(x,y)}{y} = -\frac{4xy+6y^2}{8xy^2+3x^2y} \to \frac{6}{8\underline{x}}$ se $x\to\underline{x}\neq 0$ e $y\to-\infty$. DUNQUE $y(x)$ NON PUÒ ESPLODERE IN $\underline{x}\neq 0$. Ne segue $\underline{x} = 0$

2. Sia $\vec{f}(x,y,z) := 2xz\vec{\mathbf{i}}+2yz\vec{\mathbf{j}}+(x^2+y^2-2z)\vec{\mathbf{k}}$.

(a) Si dica se $\vec{f}$ è conservativo e in caso affermativo si calcoli un potenziale $F(x,y,z)$ per $\vec{f}$ (2p.).

Vediamo direttamente se c'è un potenziale ϕ. Deve essere

$$\left.\begin{array}{l} D_x\phi = 2xz \iff \phi = x^2z+c_1(y,z) \\ D_y\phi = 2yz \iff \phi = y^2z+c_2(x,z) \end{array}\right\} \iff \phi = (x^2+y^2)z+c(z)$$

INFINE DA $D_z\phi = x^2+y^2-2z \iff \phi = (x^2+y^2)z-z^2+c(x,y) \Rightarrow$

$$\phi(x,y,z) = \boxed{(x^2+y^2)z-z^2+c}$$

è un potenziale $\iff$ $\vec{f}$ è conservativo

(b) Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$, dove $\gamma(t) = t\cos(2\pi t)\vec{\mathbf{i}} + t\sin(2\pi t)\vec{\mathbf{j}} + \sqrt{1-t^2}\vec{\mathbf{k}}$ per $0 \le t \le 1$ (1p.).

Dato che $\vec{f}$ è conservativo basta trovare $\phi(\gamma(1)) - \phi(\gamma(0)) =$
$\phi(1,0,0) - \phi(0,0,1) = \left[(1^2+0^2)0 - 0^2\right] - \left[(0^2+0^2)1 - 1^2\right] = \boxed{1}$

(c) Si mostri che la curva del punto precedente giace sulla superficie $S^+ := \{x^2+y^2+z^2 = 1, z \ge 0\}$ (1p.).

Si ha $(t\cos(2\pi t))^2 + (t\sin(2\pi t))^2 + (\sqrt{1-t^2})^2 =$
$t^2(\cos^2(2\pi t) + \sin^2(2\pi t)) + 1 - t^2 = t^2 + 1 - t^2 = 1$
DUNQUE $\gamma(t) \in S^+$ $\forall t$ (è chiaro che $\sqrt{1-t^2} \ge 0$)

(d) Si calcolino i flussi di $\vec{f}$ attraverso S^+ e attraverso $B := \{x^2+y^2+z^2 \le 1, z = 0\}$, dove, in entrambi i casi, si prende la normale orientata in modo da essere concorde con il versore $\vec{\mathbf{k}}$ (4p.).

Si ha $\operatorname{div}(\vec{f}) = 2z + 2z - 2 = 4z - 2$. Calcoliamo $\iiint_D \operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz$ dove $D = \{x^2+y^2+z^2 \le 1, z \ge 0\}$.

$\to \iint_B dx\,dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (4z-2)\,dz = \iint_B \left[2z^2 - 2z\right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx\,dy =$

$2\iint_B \left(1 - x^2 - y^2 - \sqrt{1-x^2-y^2}\right) dx\,dy =$ (coord. polari)

$2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(1 - \rho^2 - \sqrt{1-\rho^2}\right)\rho\,d\rho =$ $(s = \rho^2, ds = 2\rho\,d\rho)$

$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(1 - s - \sqrt{1-s}\right) ds = 2\pi\left[s - \frac{s^2}{2} + \frac{2}{3}(1-s)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 =$

$2\pi\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) = \boxed{-\frac{\pi}{3}}$. Inoltre $\iint_B \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma =$

$\iint_B f_3(x,y,0)\,dx\,dy = \iint_B (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \rho\,d\rho = 2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1$

$= \boxed{\frac{\pi}{2}}$. Dato che $\partial D = S^+ \cup (-B) \Rightarrow \iint_{S^+} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow$

$\iint_{S^+} \vec{f}\cdot\hat{\nu}\,d\sigma = \boxed{\frac{\pi}{6}}$

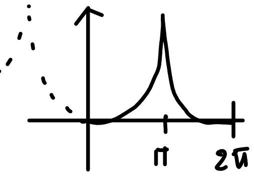
(e) Si dica se $\vec{f}$ ammette un potenziale vettore $\vec{F}$ (1p.).

No perché $\operatorname{div}(\vec{f}) \neq 0$.

3. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) := \begin{cases} t^2 & \text{se } 0 \le t \le \pi, \\ (t-2\pi)^2 & \text{se } \pi \le t \le 2\pi, \end{cases} \quad \text{ed estesa in modo da essere } 2\pi - \text{periodica.}$$

(a) Si calcolino i coefficienti della serie di Fourier di f (5p.).



Si vede che f è pari $\Rightarrow b_n = 0 \ \forall n$. $(\omega = 1 \ !!)$

Possiamo allora considerare $f(t) = t^2 \quad -\pi \le t \le \pi$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\frac{\pi^3}{3} = \boxed{\frac{\pi^2}{3}}$$

. Se $n \geq 1$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)\,dt = \underbrace{\frac{2}{\pi}\left[\frac{t^2\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0}$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2t\sin(nt)}{n}\,dt = -\frac{4}{n\pi}\left[\frac{t(-\cos(nt))}{n}\right]_0^{\pi} +$$

$$-\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt = \frac{4}{n^2\pi}\pi\cos(n\pi) - \underbrace{\frac{4}{n^2\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0} =$$

$$\frac{4}{n^2}\cos(n\pi) = \boxed{\frac{4}{n^2}(-1)^n}$$

(b) Si dica se la serie di Fourier trovata sopra converge uniformemente a f (1p.).

Dato che $|a_n| = \frac{4}{n^2}$ che è sommabile in $n \Rightarrow$ la serie $\boxed{\text{conv. uniformemente.}}$

(c) Si dica se la serie delle derivate (della serie sopra) converge uniformemente (1p.).

Se $\sum_n f_n'$ convergesse unif $\Rightarrow$ f sarebbe derivabile su $[-\pi,\pi]$ con derivata continua e periodica. Ma in $t=0$ f non è derivabile $\Rightarrow \sum_n f_n'$ $\boxed{\text{NON CONV. UNIF.}}$

(d) Si usino i calcoli fatti per trovare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (2p.).

se metto $t = \pi$ dove $f(\pi) = \pi^2 \Rightarrow$

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos(n\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \iff$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}}$$

4. Dato n intero sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_n(x) := \dfrac{x^2}{n^2 + x^4}$ e si consideri la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$; indichiamo con $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ la somma di questa serie (per le x in cui ha senso).

(a) Si dica per quali $x \geq 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente (1p.).

Dato che $\frac{x^2}{n^2+x^4} \simeq \frac{x^2}{n^2}$ (rispetto a n per x fissato) $\Rightarrow$ $\sum f_n(x)$ CONVERGE $\boxed{\forall x \geq 0}$

(b) Si dica se la somma $S(x)$ è continua in $x = \frac{1}{2}$ (4p.).

Facciamo la conv. totale su $[0,1]$ (per esempio). Si ha: $f_n(0)=0$, $f_n(1)=\frac{1}{n^2+1}$, $f_n'(x) = \frac{2x(n^2-x^4)}{(n^2+x^4)^2} \Rightarrow f_n'(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{n}$. Ma $\sqrt{n} \geq 1$ PER CUI $\underline{\max_{0\leq x\leq 1} f_n(x) = f_n(1) = \frac{1}{n^2+1}}$. Dato che $\sum_n \frac{1}{n^2+1} < +\infty \Rightarrow$ La serie conv. totalmente su $[0,1] \Rightarrow S(x)$ è continua per ogni $x \in [0,1]$ — in particolare $S(x)$ $\boxed{\text{è continua}}$ in $x = 1/2$

(c) Si dica se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente su $[0, +\infty[$ (1p.).

Dai conti sopra si vede che $\max_{x\geq 0} f_n(x) = f_n(\sqrt{n}) = \frac{1}{2n}$ ($\sqrt{n}$ è l'unico pto stazionario e $f_n \to 0$ x $x \to +\infty$). Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty \Rightarrow$ $\boxed{\text{LA SERIE } \underline{\text{NON}} \text{ CONV. TOTALMENTE SU } [0,+\infty[}$

(d) Si dica se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente su $[0, +\infty[$ (Suggerimento: si stimi $S(\sqrt{m})$ per m intero) (3p.).

Se $m \in \mathbb{N} \Rightarrow S(\sqrt{m}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n^2+m^2} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{m}{n^2+m^2} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{m}{m^2+m^2} = \frac{1}{2m} \sum_{n=1}^{m} 1 = \frac{1}{2m} \cdot m = 1/2$. DUNQUE $S(\sqrt{m}) \geq 1/2 \ \forall m$.

Se convergesse unif $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Ma allora $\lim_{m\to\infty} S(\sqrt{m}) = 0$ e questo è incompatibile con $S(\sqrt{m}) \geq 1/2 \ \forall m$.

5. Data una matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, si consideri il campo vettoriale (lineare) $\vec{f}(x,y) := A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(a) Si dica sotto quali ipotesi su A $\vec{f}$ è conservativo (1p.).

$\vec{f} = (ax+by)\vec{i} + (cx+dy)\vec{j} \Rightarrow D_y f_1 = b \;/\; D_x f_2 = c$

DEVE ESSERE $b = c$, cioè $\boxed{A \text{ simmetrica}}$

(b) Si dica sotto quali ipotesi su A $\vec{f}$ è solenoidale (1p.).

$\operatorname{div} \vec{f} = D_x f_1 + D_y f_2 = a + d$ DEVE FARE ZERO.

Dunque $\boxed{\operatorname{traccia}(A) = 0}$

(c) In virtù di quanto sopra, può esistere un campo vettoriale non costante che sia contemporaneamente solenoidale e irrotazionale? (1p.).

$\boxed{\text{È possibile}}$

Basta prendere $a = 1$, $b = c = 1$, $d = -1$, cioè

$\vec{f}(x,y) = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ per avere un tale campo