COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 18 febbraio 2015

1. Siano $f(x,y) := 8xy + x^4 + 16y^4$ e $M := \{(,y) : f(x,y) = 52\}$.

   (a) Si trovino tutti i punti critici di f (4p.);

$\frac{\partial}{\partial x} f = 8y + 4x^3$
$\frac{\partial}{\partial y} f = 8x + 64y^3$ $\Rightarrow$ pti critici $\begin{cases} 2y = -x^3 \\ x = -8y^3 \end{cases} \Rightarrow$ $2y = -(-8y^3)^3 \iff 2y = 2^9 y^9$

$\Rightarrow$ $y=0$ oppure $1 = 2^8 y^8$ cioè $y = \pm 1/2$. Se $y=0 \Rightarrow x=0$
se $y = \pm 1/2$ trovo $x = -8\left(\pm\frac{1}{2}\right)^3 = \mp 1$. Dunque i pti critici sono tre: $(0,0)$ e $\pm(1,-1/2)$

   (b) si classifichino i punti precedentemente trovati (max/min/selle)(4p.);

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = 12x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 192y^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8$. Calcoliamo l'Hessiano nei pti critici:

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ determinante $<0 \Rightarrow (0,0)$ SELLA

$Hf(\pm 1, \mp 1/2) = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 48 \end{pmatrix} \Rightarrow$ det >0, $a_{11} = 12 > 0 \Rightarrow \pm(1,-1/2)$ MINIMI (REL.?)

   (c) si dica se M è regolare (2p);

Se calcolo f NEI PTI CRITICI TROVO $f(0,0)=0$, $f(\pm 1, \mp 1/2) = -\frac{8}{2} + 1 + \frac{16}{16} = -2$. Dato che nessuno dei due fa 52
$\Rightarrow$ M non contiene pti critici $\Rightarrow$ M è regolare per Dini.

(d) si mostri che $\mathbf{P} := (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \in M$ e che vicino a $\mathbf{P}$ M è grafico di una funzione $y = g(x)$ (2p.)

Dato che $f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -8\cdot 2 + 4 + 16\cdot 4 = 52 \Rightarrow (\sqrt{2},-\sqrt{2}) \in$

Uso Dini e verifico che $\frac{\partial}{\partial y} f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) \neq 0$. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial y} f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 8\sqrt{2} + 64(-\sqrt{2})^3 = 8\sqrt{2} - 128\sqrt{2} = -120\sqrt{2} \neq 0$$

(e) si calcolino $g'(\sqrt{2})$ e $g''(\sqrt{2})$ e se ne deduca che $x = \sqrt{2}$ è un punto di minimo per g(4p.);

Notiamo che $\frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -8\sqrt{2} + 4(\sqrt{2})^3 = -8\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 0$.

Allora (sempre per Dini) $g'(\sqrt{2}) = -\dfrac{\frac{\partial}{\partial x} f(\sqrt{2},-\sqrt{2})}{\frac{\partial}{\partial y} f(\sqrt{2},-\sqrt{2})} = \dfrac{0}{120\sqrt{2}} = 0$

Per trovare g'' deriviamo due volte $f(x,g(x)) = 52 \Rightarrow$

$0 = f_{xx}(x,g(x)) + f_{xy}(x,g(x))\,g'(x) + f_{xy}(x,g(x))\,g'(x) + f_{yy}(x,g(x))\,(g'(x))^2 + f_y(x,g(x))\,g''(x)$. Se calcolo in $x = \sqrt{2}$ e ricordo che $g'(\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow$

$0 = f_{xx}(\sqrt{2},-\sqrt{2}) + f_y(\sqrt{2},-\sqrt{2})\,g''(\sqrt{2}) \Rightarrow g''(\sqrt{2}) = \dfrac{12(\sqrt{2})^2}{120\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{10} > 0$

Dato che $g' = 0$ $g'' > 0 \Rightarrow \sqrt{2}$ è pto di MIN.

(f) si dica se M è limitato (2p).

Si vede che $\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = +\infty$ ($f(x,y) \geq x^4 - 4x^2 + 16y^4 - 4y^2$)

Dunque esiste un raggio R tale che $f(x,y) \geq 52$ per (x,y) fuori dalla palla B_R di raggio R. Ne segue che $M \subset B_R$ da cui M è LIMITATO

2. Data la curva $\gamma(t) := (1 + \cos(2t))\vec{\mathbf{i}} + \sin(2t)\vec{\mathbf{j}} + 2\sin(t)\vec{\mathbf{k}}$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

(a) si calcolino i vettori unitari tangente $\mathbf{t}(\pi/2)$, normale $\mathbf{n}(\pi/2)$ e binormale $\mathbf{b}(\pi/2)$ (in $t = \pi/2$, cioè in $\gamma = 2\vec{\mathbf{k}}$) (5p.);

$\gamma'(t) = -2\sin(2t)\vec{i} + 2\cos(2t)\vec{j} + 2\cos(t)\vec{k} \Rightarrow \gamma'(\frac{\pi}{2}) = -2\vec{j}$

$\gamma''(t) = -4\cos(2t)\vec{i} - 4\sin(2t)\vec{j} - 2\sin(t)\vec{k} \Rightarrow \gamma''(\frac{\pi}{2}) = 4\vec{i} - 2\vec{k}$

DUNQUE $t(\pi/2) = \boxed{-\vec{j}}$ Per calcolare $n(\pi/2)$ abbiamo prendere

$v = \gamma'' - (\gamma''\cdot\gamma')\gamma'/\|\gamma'\|^2$ (in $t = \frac{\pi}{2}$) $= 4\vec{i} - 2\vec{k} - (\underbrace{(4\vec{i} - 2\vec{k})\cdot(-\vec{j})}_{=0})(-\vec{j}) = 4\vec{i} - 2\vec{k}$

e normalizzazione: $n(\pi/2) = \frac{v(\pi/2)}{\|v(\pi/2)\|} = \frac{4\vec{i}-2\vec{k}}{\sqrt{16+4}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{5}(2\vec{i}-\vec{k})}$

Infine $b = t \times n = -\vec{j} \times (2\vec{i}-\vec{k})\frac{\sqrt{5}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{2}(2\vec{k}+\vec{i})}$

(b) si mostri che $\gamma(t)$ giace sulla sfera centrata nell'origine di raggio 2 (2p.);

$\|\gamma(t)\|^2 = (1+\cos(2t))^2 + \sin(2t)^2 + 4\sin(t)^2 =$

$1 + 2\cos 2t + \cos^2(2t) + \sin^2(2t) + 4\sin^2(t) =$

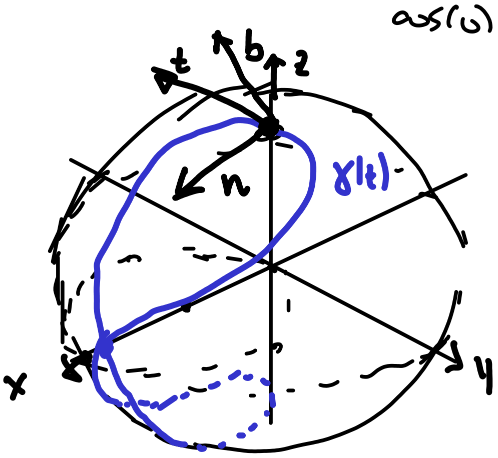
$2 + 2(\cos^2(t) - \sin^2(t)) + 4\sin^2(t) = 2 + 2\cos^2(t) + \sin^2(t) = 4$

$(\forall t)$ DUNQUE $\|\gamma(t)\| = 2 \ \forall t \Rightarrow \gamma(t) \in$ Sfera di raggio 2

(c) si calcoli $\int_\gamma z\,ds$ (4p.).

$\int_\gamma z\,ds = \int_0^{2\pi} \gamma_3(t)\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} 2\sin(t)\sqrt{4+4\cos(t)^2}\,dt =$

$(s=\cos(t)) = -4\int_{\cos(0)}^{\cos(2\pi)} \sqrt{1+s^2}\,ds = 0$!!



3. Si risponda ai seguenti quesiti barrando una delle caselle (1 punto ciascuno).

(a) Se f ha derivate parziali prime continua, allora la matrice Hessiana è simmetrica
VERO | ~~FALSO~~.

(b) Se $f(x,y)$ è continua su $E := \{x^2+4y^2 \leq 9\}$, allora f ammette massimo e minimo su E
~~VERO~~ | FALSO.

(c) Se $\gamma(t)$ è una curva che giace su una superficie S, allora la normale $\mathbf{n}(t)$ a $\gamma(t)$ è parallela alla normale $\vec{\nu}$ a S (nel punto $\gamma(t)$) VERO | ~~FALSO~~.

(d) L'integrale improprio $\iiint_{\{x^2+y^2+z^2\leq 1\}} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}\,dx\,dy\,dz$ converge se e solo se $\alpha < 1$

VERO | ~~FALSO~~.

4. Si calcoli $\iiint_E xyz\, dx\, dy\, dz$ dove $E := \left\{ \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0 \right\}$ (7p.).

Usiamo il cambio di variabile

$$x = 2\rho \cos\theta \sin\psi \quad y = \rho \sin\theta \sin\psi \quad z = 3\rho\cos\psi \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 2\cos\theta\sin\psi, & -2\rho\sin\theta\sin\psi & 2\cdot\rho\cos\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi, & \rho\cos\theta\sin\psi, & \sin\theta\cos\psi \\ 3\cos\psi & , \; 0 & , -3\rho\sin\psi \end{pmatrix}$$

$$\det J = 6\rho^2 \sin\psi \det \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\psi, & -\sin\theta & , \cos\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi, & \cos\theta & , \sin\theta\cos\psi \\ \cos\psi & , \; 0 & , -\sin\psi \end{pmatrix} = -6\rho^2\sin\psi$$

$$\Rightarrow \iiint_E xyz = \iiint_{E1} 6\rho^2 \sin\psi \, \rho^3 \sin\theta\cos\psi \sin^2\psi \cos\psi \, 6 \, d\rho\, d\theta\, d\psi =$$

dove $E1 := \{0 \le 1 \le \rho, 0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le \psi \le \pi/2\}$

$$36 \int_0^1 \rho^5 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \int_0^{\pi/2} \cos\psi \sin^3(\psi) = 36 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

DATO CHE:

$$\int_0^1 \rho^5 d\rho = \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\, d\theta = \left[-\frac{1}{4}\cos(2\theta)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos\psi\sin^3(\psi)\, d\psi = (t = \sin\psi, -\cos\psi\, d\psi = dt) = -\int_1^0 t^3 dt =$$

$$\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

RIGUARDO ALLE DOMANDE

(a) è falso: ci vuole la continuità delle derivate seconde perché le derivate seconde siano simmetriche.

(b) è vero per Weierstrass dato che $\{x^2 + 4y^2 \le 9\}$ è limitato e chiuso

(c) è falso: lo si vede guardando l'esercizio 2 - la normale $n(\pi/2)$ alla curva non è parallela alla normale alla sfera (che vale $\vec{k}$).

(d) IN COORD. POLARI L'INT. DIVENTA $2\pi \int_0^1 \frac{\rho^2 d\rho}{\rho^{2\alpha}} \int_0^\pi \sin\psi\, d\psi$ che converge per $2\alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{3}{2}$