COGNOME E NOME:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 27 gennaio 2015. Primo foglio.

1. Si calcoli l'integrale triplo $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ (2p.) dove:

$$f(x,y,z) = |z|\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1-2z^2+z^4, |z| \le 1\}.$$

2. Si trovi il valore massimo della funzione $f(x,y) := xy$ sull'insieme $\Omega := \{4x^2+y^2=8\}$ (2p.)

3. Data la funzione $f(x,y) := 3e^{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-2} - xy$:

   (a) si trovino tutti i suoi punti stazionari (2p.);

(b) si classifichi la natura dei punti precedentemente trovati (2p.).

Si consideri poi l'insieme $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 3\}$..

(c) Si mostri che $P := \left(2\sqrt{2}, 0\right) \in M$ e che vicino a P l'insieme M è grafico di una funzione $y = g(x)$; si dica inoltre quanto fanno $g\left(2\sqrt{2}\right)$, $g'\left(2\sqrt{2}\right)$ e $g''\left(2\sqrt{2}\right)$ (3 p.).

(d) Si mostri che M è limitato (1p.)

4. Si consideri la funzione $f(t)$ definita da: $f(t) := \begin{cases} -t^2 + \pi t & \text{per } 0 \leq t \leq \pi, \\ t^2 + \pi t & \text{per } -\pi \leq t \leq 0, \end{cases}$ quando $t \in [-\pi, \pi]$ ed estesa tutto $\mathbb{R}$ in modo da essere 2π-periodica.

   (a) Si disegni il grafico di f e si dica se f è derivabile (1p.).

   (b) Si trovino i coefficienti a_n, b_n e ω della serie di Fourier: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(\omega t))$ (4p.)

   (c) Si dica (giustificando) se la serie converge uniformemente a f (1p.).

   (d) Si usi quanto sopra per calcolare $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ (2p.).

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando una delle caselle (1 punto ciascuno).

   (a) Se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, allora f è differenziabile in $(0,0)$ $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

   (b) Dal teorema di Schwartz segue che, se la matrice Hessiana è simmetrica, allora le derivate parziali seconde sono continue $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

   (c) Se $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ convergono uniformemente ad f, allora $\int_a^b f_n\,dx$ converge uniformemente a $\int_a^b f\,dx$ $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

   (d) Sia $\vec{f}(x,y)$ un campo vettoriale conservativo, allora $\operatorname{div}(\vec{f}) = 0$ $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

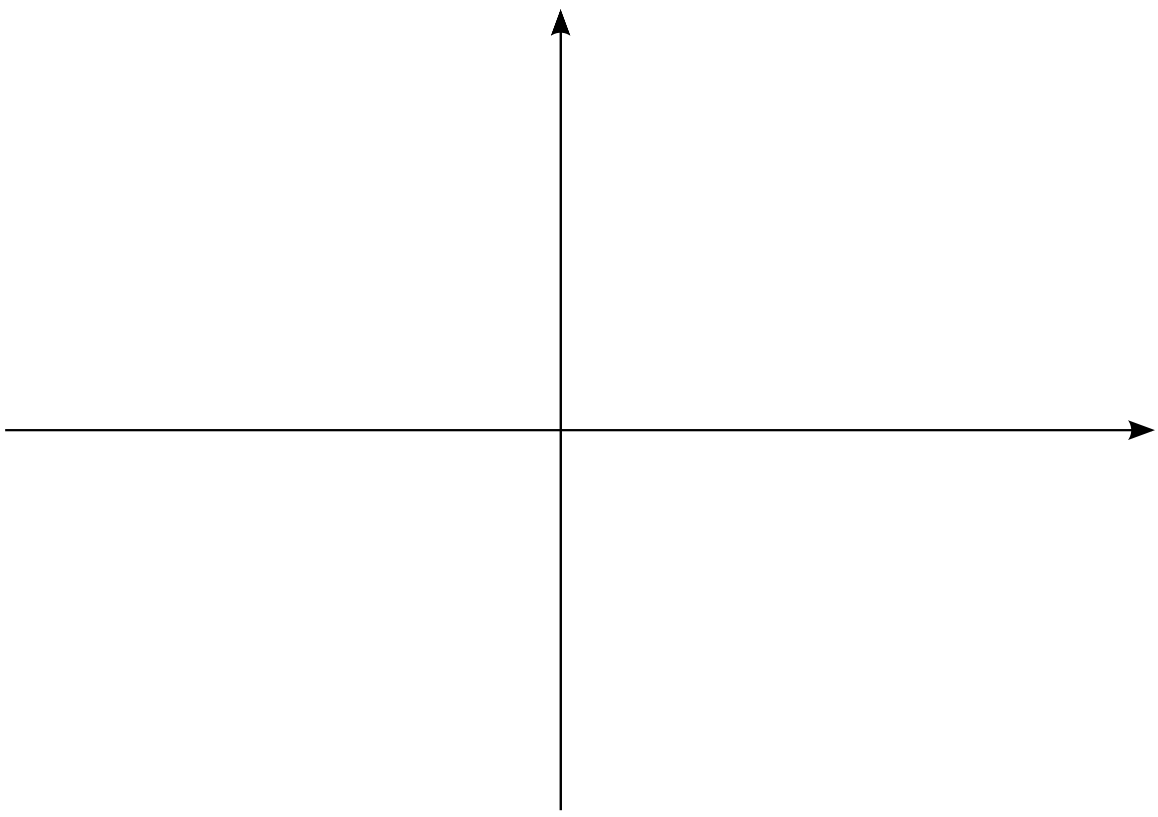
COGNOME E NOME:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 27 gennaio 2015. Secondo foglio.

6. Si consideri il problema di Cauchy

$$y' = \frac{y}{x}\frac{e^{\frac{y}{x}}}{e^{\frac{y}{x}} - x}, \qquad y(x_0) = y_0.$$

(a) Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy (1p.). Si trovino inoltre le soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione cresce o decresce, riportando queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).



(b) Si trovi un fattore integrante per l'equazione, avente la forma $\lambda(x, y) = \lambda(x)$ (2p.).

(c) Si trovi un integrale primo per l'equazione (2p.).

(d) Si trovi un'espressione, eventualmente implicita, per la soluzione nel caso della condizione iniziale $y(1) = -1$, e la si usi per trovare l'intervallo di esistenza massimale e i limiti di $y(x)$ agli estremi di tale intervallo; si disegni il grafico di $y(x)$ nel diagramma sopra (3p.).

7. Consideriamo:

$$\vec{f_1}(x,y,z) := z^2(2xz\vec{\mathbf{i}} + 2yz\vec{\mathbf{j}} + 3(x^2+y^2)\vec{\mathbf{k}}),\ \vec{f_2}(x,y,z) := e^z(x^2y\vec{\mathbf{i}} + xy^2\vec{\mathbf{j}} - 4xy\vec{\mathbf{k}}), \quad \vec{f} := \vec{f_1} + \vec{f_2}$$
$$\Omega := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z \le 1, z \ge 0\},$$
$$L := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z = 1, z \ge 0\}, \quad B := \{(x,y,0) : x^2+y^2 \le 1\}.$$

(a) Si trovi – se esiste – un potenziale F_1 per $\vec{f_1}$ (1p.).

(b) Si trovi – se esiste – un potenziale vettore $\vec{F_2}$ per $\vec{f_2}$ (1p.).

(c) Si calcoli $\iint\limits_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma$ (3p.)

(d) Si scriva una curva γ che descrive il bordo di B girando in verso antiorario attorno all'asse z e si calcolino $\int\limits_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s}$ e $\int\limits_{\gamma} \vec{F}_2 \cdot d\vec{s}$ (2p.).

(e) Si calcolino i due "contributi separati" $\iint\limits_{B} \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma$ e $\iint\limits_{L} \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma$ (2p.).