COGNOME E NOME: | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 27 gennaio 2015. Primo foglio.

1. Si calcoli l'integrale triplo $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz$ (2p.) dove:

$$f(x,y,z) = |z|\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1-2z^2+z^4\}.$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1}\left(\int_{B_z} f(x,y,z)\,dx\,dy\right)dz = 2\int_0^1 z\left(\int_{B_z}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\right)dz =$$

$$\left[\text{dove } B_z = \{\sqrt{x^2+y^2} \le 1-z^2\}\right] = 4\pi\int_0^1 z\int_0^{1-z^2} \rho\cdot\rho\,d\rho =$$

$$4\pi\int_0^1 z\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{1-z^2} = \frac{4\pi}{3}\int_0^1 (1-z^2)^3 z\,dz = \frac{2\pi}{3}\int_0^1 (1-t)^3\,dt =$$

$$\pi\,\frac{2}{3}\left[-\frac{(1-t)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

2. Si trovi il valore massimo della funzione $f(x,y) := xy$ sull'insieme $\Omega := \{4x^2+y^2 = 8\}$ (2p.)

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. Uso i moltiplicatori per trovare i pti critici vincolati a Ω:

$$\begin{cases} y = 8\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ 4x^2+y^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \quad x = 2\lambda\cdot 8\lambda x \iff x=0 \text{ oppure } 16\lambda^2 = 1.$$

Ma $x=0 \Rightarrow y=0$ IMPOSSIBILE PERCHÉ $(0,0)\notin\Omega$.
DUNQUE $\lambda = \pm 1/4$. DUE CASI

$\boxed{\lambda = 1/4}$

$$\begin{cases} y = 2x \\ 4x^2+y^2 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ 8x^2 = 8 \end{cases} \iff \begin{matrix} x = +/- 1 \\ y = +/- 2 \end{matrix}$$

$\boxed{\lambda = -1/4}$

$$\begin{cases} y = -2x \\ 4x^2+y^2 = 8 \end{cases} \iff \begin{matrix} x = \pm 1 \\ y = \mp 2 \end{matrix}$$

DATO CHE $f(\pm1,\pm2) = 2$, $f(\pm1,\mp2) = -2 \Rightarrow \boxed{\max_\Omega f = 2}$

3. Data la funzione $f(x,y) := 3e^{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-2} - xy$:

(a) si trovino tutti i suoi punti stazionari (2p.);

$D_x f = \frac{3}{2} x e^\Delta - y$, $D_y f = \frac{2}{3} y e^\Delta - x$ dove $\Delta = \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} - 2$. DUNQUE

$$\begin{cases} \frac{3}{2} x e^\Delta = y \\ \frac{2}{3} y e^\Delta = x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{3}e^\Delta\cdot\frac{3}{2}xe^\Delta \iff x = xe^{2\Delta} \iff x=0 / e^{2\Delta} = 1$$

Se $x=0$ TROVO $y=0$. Se $e^{2\Delta}=1 \iff 2\Delta = 0 \iff \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 2$

TORNANDO AL SISTEMA: $\begin{cases} y = 3x/2 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x/2 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{4} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ PTI STAZ. $(0,0)$, $\pm(2,3)$

$\frac{3}{2}x\frac{2}{9}y\,e^{\Delta}-1$

(b) si classifichi la natura dei punti precedentemente trovati (2p.).

Calcolo le derivate II^e (sempre $\Delta = \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-2$)

$D_{xx}f = \frac{3}{2}e^{\Delta}+\frac{3}{4}x^2e^{\Delta}$, $D_{yy} = \frac{2}{3}e^{\Delta}+\frac{4}{27}y^2e^{\Delta}$, $D_{xy}=\frac{xy}{3}e^{\Delta}-1$

$\Rightarrow Hf(0,0)=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}e^{-2} & -1\\ -1 & \frac{2}{3}e^{-2}\end{pmatrix} \Rightarrow \det(Hf(0,0)) = e^{-4}-1<0$ $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ SELLA

$Hf(2,3)$ $(\Delta=0)$ $=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}+3, & \frac{2\cdot3}{3}-1\\ \frac{2\cdot 3}{3}-1, & \frac{2}{3}+\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{2} & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ DET $=8>0$, $a_{11}=\frac{9}{2}>0$ $\Rightarrow \pm\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ MINIMI

(IN $(-2,-3)$ è lo stesso)

Si consideri poi l'insieme $M := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=3\}$..

(c) Si mostri che $P := (2\sqrt{2},0)\in M$ e che vicino a P l'insieme M è grafico di una funzione $y=g(x)$; si dica inoltre quanto fanno $g(2\sqrt{2})$, $g'(2\sqrt{2})$ e $g''(2\sqrt{2})$ (3 p.).

$f(2\sqrt{2},0)=3 \Rightarrow P\in M$. $\underline{D_yf(2\sqrt{2},0) = -2\sqrt{2}\neq 0}$ $\Rightarrow$ per DINI M è un grafico $y=g(x)$ E CHIARAMENTE $g(2\sqrt{2})=0$.

$D_xf(2\sqrt{2},0)=3\sqrt{2}$ e quindi (DINI DICE $g'(x) = -\frac{D_xf(x,g(x))}{D_yf(x,g(x))}$ $(*)$)

$g'(2\sqrt{2}) = \frac{-3\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$. DERIVANDO LA RELAZIONE $(*)$

$$g''(x) = -\frac{(D_{xx}f+D_{xy}f\cdot g')D_yf - D_xf(D_{xy}f+D_{yy}f\,g')}{(D_yf)^2}$$ (dove $f=f(x,g(x))$ e $g'=g'(x)$)

$$\Rightarrow g''(2\sqrt{2}) = -\frac{\left(\frac{3}{2}+(-1)\frac{3}{2}\right)(-2\sqrt{2})-3\sqrt{2}\left(-1+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)}{8} = 0$$

(d) Si mostri che M è limitato (1p.)

Si ha $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) \geq \lim_{(x,y)\to\infty} e^{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}} - \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$ (uso $xy\leq \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$)

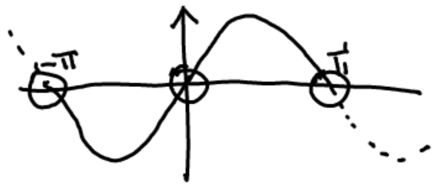
$=\lim_{\rho\to\infty} e^{\rho^2/9}-\frac{\rho^2}{2} = +\infty$. NE SEGUE CHE

FUORI DA UN DISCO B_R DI RAGGIO R OPPORTUNO $f(x,y)\geq 4$.

MA ALLORA $M\subset B_R$ in particolare M è LIMITATO

4. Si consideri la funzione $f(t)$ definita da: $f(t) := \begin{cases} -t^2 + \pi t & \text{per } 0 \le t \le \pi, \\ t^2 + \pi t & \text{per } -\pi \le t \le 0, \end{cases}$ quando $t \in [-\pi, \pi]$ ed estesa tutto $\mathbb{R}$ in modo da essere 2π-periodica.

(a) Si disegni il grafico di f e si dica se f è derivabile (1p.).



È DERIVABILE PERCHÉ LE DERIVATE "SI RACCORDANO"

$$\left.\frac{d}{dt}\left(-t^2+\pi t\right)\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\left(t^2+\pi t\right)\right|_{t=0}, \quad \left.\frac{d}{dt}\left(-t^2+\pi t\right)\right|_{t=\pi} = \left.\frac{d}{dt}\left(t^2+\pi t\right)\right|_{t=-\pi}$$

$$\begin{matrix} \| & \| & \| & \| \\ \pi & \pi & -\pi & -\pi \end{matrix}$$

(b) Si trovino i coefficienti a_n, b_n e ω della serie di Fourier: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(\omega t))$ (4p.)

Dato che T (periodo) $= 2\pi \Rightarrow \boxed{\omega = 2\pi/T = 1.}$

Dato che f è dispari $\boxed{a_n = 0 \ \forall n}$. Infine (INTEGRO PER PARTI)

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi t - t^2)\sin(nt)\,dt =$$

$$\frac{2}{\pi}\Big[\underbrace{t(\pi-t)}_{=0 \text{ IN } 0 \text{ e } \pi}\cos(nt)\cdot\left(\frac{-1}{n}\right)\Big]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(\pi-2t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{n\pi}\Big[(\pi-2t)\underbrace{\sin(nt)}_{=0 \text{ IN } 0 \text{ E } \pi}\cdot\frac{1}{n}\Big]_0^{\pi}$$

$$+ \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt = \frac{4}{n^2\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{n^3\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right) = \frac{4(1-(-1)^n)}{\pi n^3}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ È PARI} \\ \dfrac{8}{\pi n^3} & \text{se } n \text{ è DISPARI.} \end{cases}$$

DUNQUE (ponendo $n = 2k+1$, $k = 0, \dots$)

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin((2k+1)t) \qquad (\star)$$

(c) Si dica (giustificando) se la serie converge uniformemente a f (1p.).

Dato che $\sum_n |a_n|$ (=0) e $\sum_n |b_n|$ sono sommabili $\left(|b_n| \sim \frac{1}{n^3}\right)$

$\Rightarrow$ la serie converge UNIFORMEMENTE. OPPURE: dato che f ha derivata 1ª CONTINUA $\Rightarrow$ la serie CONV. UNIF.

(d) Si usi quanto sopra per calcolare $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ (2p.).

Se metto $t = \frac{\pi}{2}$ trovo $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$. Usando la formula $(\star) \Rightarrow$

$$\frac{\pi^2}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(\pi/2 + k\pi)}{(2k+1)^3} = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando una delle caselle (1 punto ciascuno).

(a) Se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, allora f è differenziabile in $(0,0)$ $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(b) Dal teorema di Schwartz segue che, se la matrice Hessiana è simmetrica, allora le derivate parziali seconde sono continue $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(c) Se $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ convergono uniformemente ad f, allora $\int_a^b f_n\,dx$ converge uniformemente a $\int_a^b f\,dx$ $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(d) Sia $\vec{f}(x,y)$ un campo vettoriale conservativo, allora $\mathrm{div}(\vec{f}) = 0$ $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

- La (a) dice che f è continua in zero, che non implica la differenziabilità (GIÀ IN UNA VARIABILE CI SONO FUNZIONI CONTINUE NON DERIVABILI
- SCHWARZ DICE CHE SE LE DERIVATE SECONDE SONO CONTINUE $\Rightarrow$ L'HESSIANO È SIMMETRICO.

  NON DICE IL VICEVERSA (E CI SONO CONTROESEMPI)
- La c) è un teorema standard
- La (d) è falsa. se $\vec{f}$ è conservativo $\Rightarrow$ $\mathrm{rot}(\vec{f}) = 0$.

  La divergenza può essere $\neq 0$ (è il "Laplaciano" di F, se $\nabla F = \vec{f}$)

  (vedi per esempio l'esercizio 7)

COGNOME E NOME:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 27 gennaio 2015. Secondo foglio.

6. Si consideri il problema di Cauchy

$$y' = \frac{y}{x}\frac{e^{\frac{y}{x}}}{e^{\frac{y}{x}} - x}, \qquad y(x_0) = y_0.$$

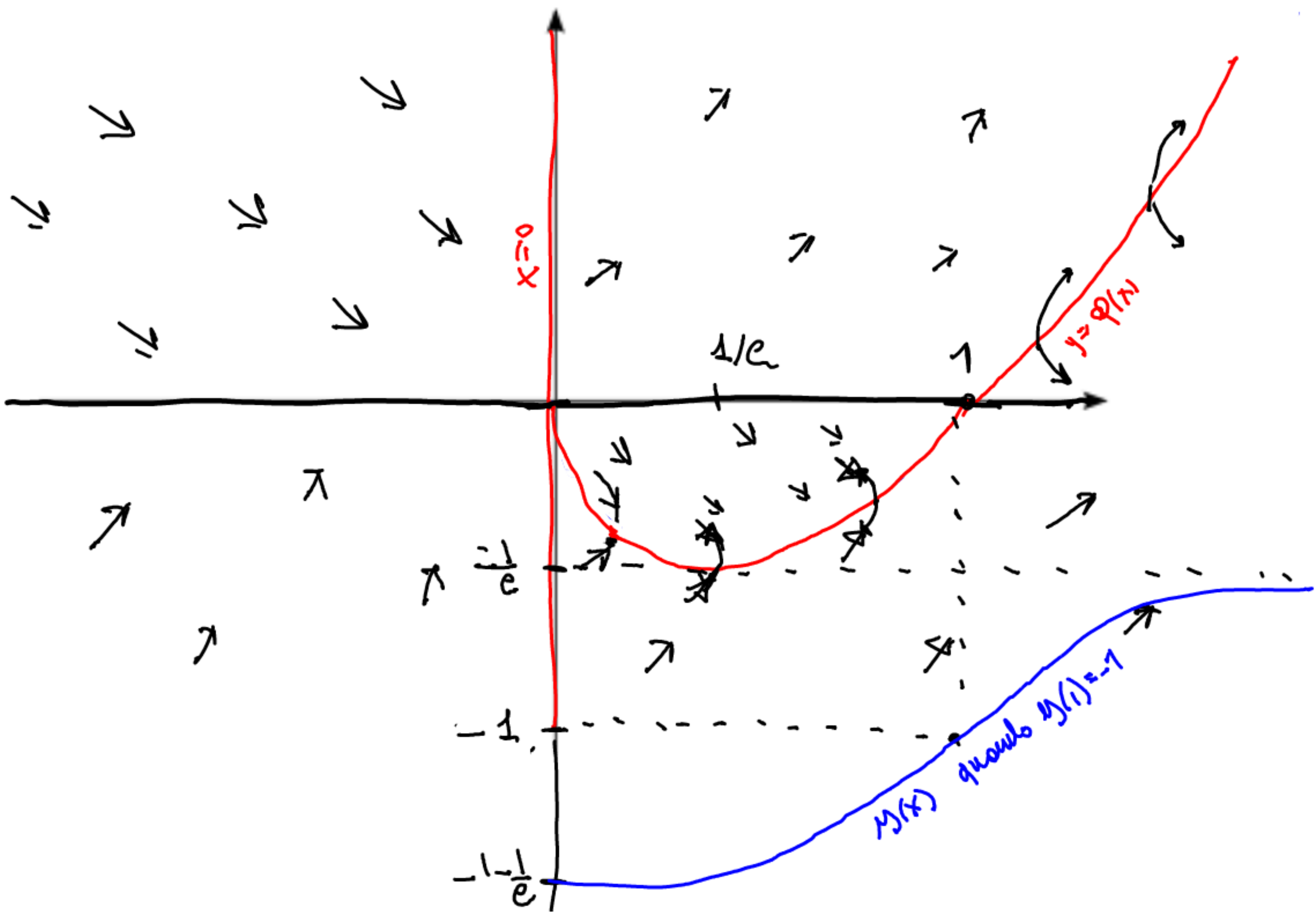
(a) Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy (1p.). Si trovino inoltre le soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione cresce o decresce, riportando queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).

Se $F(x,y) = \frac{y}{x}\frac{e^{y/x}}{e^{y/x}-x}$ si ha che $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ esiste continua se $x \neq 0$ e $e^{y/x} \neq x$. In questo INSIEME ALLORA VALE CAUCHY.

Notiamo che $e^{y/x} = x \iff \frac{y}{x} = \ln(x) \iff y = x\ln(x) =: \varphi(x)$ per $x>0$.

Dato che $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$, $\frac{d}{dx}x\ln(x) = \ln x + 1$, il grafico di φ è quello in rosso qui sotto.

L'unica sol. costante è $y=0$. Le zone di crescenza/decrescenza sono ricavabili dal segno di $F(x,y)$ e sono rappresentate sotto



(b) Si trovi un fattore integrante per l'equazione, avente la forma $\lambda(x,y) = \lambda(x)$ (2p.).

Deve essere $D_y\left(\lambda(x)\left(y e^{y/x}\right)\right) = D_x\left(\lambda(x)\left(x^2 - x e^{y/x}\right)\right) \iff$

$$\lambda(x)\left(e^{y/x} + y\cdot\frac{1}{x}e^{y/x}\right) = \lambda'(x)\left(x^2 - x e^{y/x}\right) + \lambda(x)\left(2x - e^{y/x} - x\cdot\frac{-y}{x^2}e^{y/x}\right) \iff$$

$$\lambda(x)\left(e^{y/x} + \cancel{\frac{y}{x}e^{y/x}}\right) = \lambda'(x)x\left(x - e^{y/x}\right) + \lambda(x)\left(2x - e^{y/x} + \cancel{\frac{y}{x}e^{y/x}}\right) \iff$$

$$\lambda(x)\left(2e^{y/x} - 2x\right) = \lambda'(x)x\left(x - e^{y/x}\right) \iff -2\lambda(x) = \lambda'(x)x$$

DUNQUE TROVO $\lambda' = -\frac{2\lambda}{x}$ che ha soluzione $\lambda(x) = \frac{c}{x^2}$ per $c \in \mathbb{R}$. POSSO PRENDERE $c=1$ cioè $\boxed{\lambda(x) = \frac{1}{x^2}}$

(c) Si trovi un integrale primo per l'equazione (2p.).

Deve essere $D_x F = \frac{y}{x^2}e^{y/x}$ e $D_y F = 1 - \frac{e^{y/x}}{x}$

Dalla seconda trovo $F = y - e^{y/x} + c(x)$. Se derivo in x trovo allora $D_x F = \frac{y}{x^2}e^{y/x} + c'(x)$ che mi dà $c' = 0$. Dunque $c =$ costante e

$$\boxed{F(x,y) = y - e^{y/x} + c}$$

. Questo mi dà che, se $y(x)$ è soluzione $\Rightarrow$

(●) $y(x) - e^{y(x)/x} =$ costante

(d) Si trovi un'espressione, eventualmente implicita, per la soluzione nel caso della condizione iniziale $y(1) = -1$, e la si usi per trovare l'intervallo di esistenza massimale e i limiti di $y(x)$ agli estremi di tale intervallo; si disegni il grafico di $y(x)$ nel diagramma sopra (3p.).

Se uso (●) con $(x,y) = (1,-1) \Rightarrow$ costante $= -1 - 1/e$ e quindi

$$y + 1 + 1/e = e^{y/x} \iff \frac{y}{x} = \ln(y+1+1/e) \iff x = \frac{y}{\ln(y+1+1/e)} =: h(y)$$

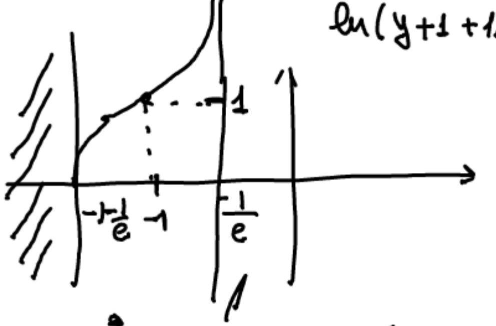
Faccio il grafico di $h(y)$.

DOMINIO $= \{y > -1 - 1/e,\ y \neq -1/e\}$

$\lim_{y \to -1-1/e^+} h(y) = \frac{-1-1/e}{-\infty} = 0^+$

$\lim_{y \to -\frac{1}{e}^{+/-}} h(y) = \frac{-1/e}{0^{+/-}} = \mp\infty$

$h'(y) > 0$ tra $-1-\frac{1}{e}$ e $-\frac{1}{e}$. INVERTENDO h trovo $y(x)$:



MI INTERESSA QUI $\left(h(-1) = \frac{-1}{\ln(1/e)} = 1\right)$

$\Rightarrow$ y è definita su $]0,+\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} y(x) = -1 - \frac{1}{e}$ $\quad \lim_{x \to +\infty} y(x) = -\frac{1}{e}$

7. Consideriamo:

$$\vec{f_1}(x,y,z) := z^2(2xz\vec{\mathbf{i}} + 2yz\vec{\mathbf{j}} + 3(x^2+y^2)\vec{\mathbf{k}}),\ \vec{f_2}(x,y,z) := e^z(x^2y\vec{\mathbf{i}} + xy^2\vec{\mathbf{j}} - 4xy\vec{\mathbf{k}}),\quad \vec{f} := \vec{f_1} + \vec{f_2}$$
$$\Omega := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z \le 1, z \ge 0\},$$
$$L := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z = 1, z \ge 0\},\quad B := \{(x,y,0) : x^2+y^2 \le 1\}.$$

(a) Si trovi – se esiste – un potenziale F_1 per $\vec{f_1}$ (1p.). Deve essere

$$\left.\begin{array}{l} D_x F_1 = 2xz^3 \Rightarrow F_1 = x^2z^3 + c(y,z) \\ D_y F_1 = 2yz^3 \Rightarrow F_1 = y^2z^3 + d(x,z) \end{array}\right\} \Rightarrow F_1 = (x^2+y^2)z^3 + c(z)$$

se derivo rispetto a z trovo $D_z F_1 = 3z^2(x^2+y^2) + c'(z) = f_{1,3}$ che implica $c' = 0 \Rightarrow c(z) = c$. DUNQUE HO TROVATO UN POTENZIALE $\boxed{F_1(x,y,z) = (x^2+y^2)z^3}$ (+ costante)

($\Rightarrow \vec{f}_1$ è CONSERVATIVO).

(b) Si trovi – se esiste – un potenziale vettore $\vec{F_2}$ per $\vec{f_2}$ (1p.). Cerco $\vec{F_2} = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ 0\end{pmatrix}$. Allora

$$-D_z\psi_2 = f_{2,1} = e^z x^2 y \Rightarrow \psi_2 = -e^z x^2 y + c(x,y)$$
$$D_z\psi_1 = f_{2,2} = e^z xy^2 \Rightarrow \psi_1 = e^z xy^2 + d(x,y)$$
$$D_x\psi_2 - D_y\psi_1 = f_{2,3} = -4xye^z \Leftrightarrow$$
$$-2xye^z + c_x(x,y) - 2xye^z - d_y(x,y) = -4xy \Leftrightarrow c_x - d_y = 0.$$

Posso prendere $c = d = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{F_2}(x,y,z) = e^z xy(-y\vec{i} + x\vec{j})} \quad (+\nabla\phi)$$

(c) Si calcoli $\iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma$ (3p.)

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{f_1}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma + \underbrace{\iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{f_2}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma}_{=0 \text{ perché } \vec{f_2} = \operatorname{rot}\vec{F_2}}$$

$$= \iiint_\Omega \left(4z^3 + 6z(x^2+y^2)\right)dx\,dy\,dz = \iint_B \left(\int_0^{1-x^2-y^2}\left(4z^3 + 6z(x^2+y^2)\right)dz\right)dx\,dy =$$

$$\iint_B \left[z^4 + 3z^2(x^2+y^2)\right]_0^{1-x^2-y^2} dx\,dy = \iint_B \left[(1-x^2-y^2)^4 + 3(1-x^2-y^2)^2(x^2+y^2)\right]dx\,dy =$$

(coordinate polari)

$$2\pi\int_0^1 \left[(1-\rho^2)^4 + 3(1-\rho^2)^2\rho^2\right]\rho\,d\rho = (t = \rho^2)$$

$$\pi\int_0^1 \left[(1-t)^4 + 3(1-t)t\right]dt = (1-t = s) = \pi\int_0^1 \left(s^4 + 3s^2(1-s)\right)ds =$$

$$\pi\left[\frac{s^5}{5} + s^3 - 3\frac{s^4}{4}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{5} + 1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{9}{20}\pi$$

(d) Si scriva una curva γ che descrive il bordo di B girando in verso antiorario attorno all'asse z e si calcolino $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$ e $\int_\gamma \vec{F}_2 \cdot d\vec{s}$ (2p.).

$\gamma(t) = \cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j}$ per $t \in [0, 2\pi]$ $\left(\Rightarrow \gamma'(t) = -\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j}\right)$

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_\gamma \vec{f}_1 \cdot d\vec{s} + \int_\gamma \vec{f}_2 \cdot d\vec{s} = \underbrace{\int_\gamma \nabla F_1 \cdot d\vec{s}}_{=0} + \int_0^{2\pi} e^0 \cos(t)\sin(t)\left(\cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j}\right) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t) \underbrace{\left(\cos(t)\,\vec{i} + \sin(t)\,\vec{j}\right) \cdot \left(-\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j}\right)}_{=0} dt = 0$$

$$\int_\gamma \vec{F}_2 \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} e^0 \cos(t)\sin(t) \underbrace{\left(-\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j}\right) \cdot \left(-\sin(t)\,\vec{i} + \cos(t)\,\vec{j}\right)}_{=1} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)\sin(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2t)\,dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{2\pi} = 0$$

(e) Si calcolino i due "contributi separati" $\iint_B \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma$ e $\iint_L \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma$ (2p.).

$$\iint_B \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \iint_B \vec{f}_1 \cdot \nu\, d\sigma + \iint_B \vec{f}_2 \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \underbrace{\iint_B \vec{f}_1 \cdot \vec{\nu}\, d\sigma}_{(1)} + \underbrace{\iint_B \operatorname{rot} \vec{F}_2 \cdot \vec{\nu}\, d\sigma}_{(2)}$$

Ma $(1) = \iint_B -f_{1,3}(x,y,0)\,dx\,dy = 0$ perché $f_{1,3}(x,y,0) = 0$ e

$(2) = \int_\gamma \vec{F}_2 \cdot d\vec{s} = 0$ per quanto visto in (d).

DUNQUE $\iint_B \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = 0$.

Per differenza, usando il passo c, $\Rightarrow \iint_L \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \frac{9}{20}\pi$