COGNOME E NOME:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 9 gennaio 2015. Primo foglio.

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x,y) := \dfrac{\sin^2(xy)}{x^2+y^2}$ per $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$ (per rispondere ai quesiti conviene ricordarsi che $|\sin(t)| \leq |t|$).

   (a) Si dica se f è continua in $(0,0)$ (2p.).

Se $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$ (coordinate polari) si ha

$$|f(x,y)| = \left|\frac{\sin^2(\rho^2\cos\theta\sin\theta)}{\rho^2}\right| \leq \frac{\rho^4\cos^2(\theta)\sin^2\theta}{\rho^2} \leq \rho^2$$

e quindi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \Rightarrow f$ è continua in $(0,0)$

   (b) Si dica se f è differenziabile in $(0,0)$ (2p.).

Dato che $f(x,0) = 0$ e $f(0,y) = 0$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
Calcoliamo $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ per $(x,y) \neq (0,0)$. Usando le regole di derivazione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2\sin(xy)\cos(xy)\,y\,(x^2+y^2) - 2x\sin^2(xy)}{(x^2+y^2)^2}.$$ Ne segue

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{2\sin(\rho^2\cos\theta\sin\theta)\cos(\rho^2\sin(\theta)\cos(\theta))\rho\sin(\theta)\rho^2 - 2\rho\sin(\theta)\sin^2(\rho^2\cos\theta\sin\theta)}{\rho^4}\right|$$

$$\leq \frac{2\rho^2\cdot\rho\cdot\rho^2 + 2\rho\cdot(\rho^2)^2}{\rho^4} = 4\rho.$$ Dunque $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$

Nello stesso modo si vede che $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \to 0$. Per il teor. del diff. totale f è DIFFERENZIABILE

2. Si calcoli il volume dell'insieme D definito da $D := \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} - ze^{-z} \leq 0, 0 \leq z \leq 1\}$ (3p.).

D è ottenuto ruotando il grafico di $x = ze^{-z}$ attorno all'asse z.

Usando Fubini $|D| = \int_0^1 |B_z|\,dz$ dove B_z è il cerchio di raggio ze^{-z} $\Rightarrow$

$$|D| = \int_0^1 \pi z^2 e^{-2z}\,dz = \pi\left[\frac{z^2e^{-2z}}{-2}\right]_0^1 + \frac{\pi}{2}\int_0^1 2ze^{-2z}\,dz =$$

$$-\frac{\pi}{2e^2} + \pi\left[\frac{ze^{-2z}}{-2}\right]_0^1 + \frac{\pi}{2}\int_0^1 e^{-2z}\,dz = -\frac{\pi}{2e^2} - \frac{\pi}{2e^2} + \frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{-2z}}{-2}\right]_0^1 =$$

$$-\frac{5\pi}{4e^2} + \pi = \pi\,\frac{4e^2-5}{4e^2}$$

3. Data la funzione $f(x, y) := \ln(1 + 8xy) - x^2 - 4y^2$:

(a) si trovi il il dominio di f (1p.), e poi si trovino tutti i suoi punti stazionari (2p.);

- IL DOMINIO È $\{(x,y) : 1+8xy > 0\}$ (perché $\ln(1+8xy)$ abbia senso)
- $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{8y}{1+8xy} - 2x$ $\quad \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{8x}{1+8xy} - 8y$ $\Rightarrow$ i pti stazionari

verificano: $\begin{cases} \frac{4y}{1+8xy} = x \\ \frac{x}{1+8xy} = y \end{cases}$ Ricavando x dalla prima si ottiene $\frac{4y}{(1+8xy)^2} = y$ da cui o $y=0$ oppure $(1+8xy)^2 = 4$ che equivale a $1+8xy = \pm 2$. Ma $1+8xy = -2$ NON È POSSIBILE (fuori dal dominio), per cui $1+8xy = 2$. Dunque

$$\begin{cases} \frac{4y}{2} = x \\ 1+8xy = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ 16y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 1/2 \\ y = \pm 1/4 \end{cases}.$$

IN DEFINITIVA I PUNTI CRITICI SONO

$(0,0)$, $\pm(1/2, 1/4)$.

(b) si classifichi la natura dei punti precedentemente trovati (2p.);

Calcoliamo le derivate seconde. Si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-64y^2}{(1+8xy)^2} - 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-64x^2}{(1+8xy)^2} - 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{8(1+8xy) - 8y \cdot 8x}{(1+8xy)^2} = \frac{8}{(1+8xy)^2}.$$ Ne segue

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(Hf(0,0)) < 0 \Rightarrow (0,0)$ SELLA

$$Hf(1/2, 1/4) = \begin{pmatrix} \frac{-64/16}{4} - 2 & , & \frac{8}{4} \\ \frac{8}{4} & , & \frac{-64/4}{4} - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$$

che ha determinante > 0 e traccia negativa $\Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ è PTO DI MAX

(stesso discorso per $(-1/2, -1/4)$)

(c) si dica se esiste il massimo di f (giustificando la risposta) e in caso affermativo si dica quanto vale tale massimo (2p.).

Se si fa il limite per $\|(x,y)\| \to \infty$ e per $(x,y) \to (x_0,y_0) \in \partial D$ si trova $-\infty$. Allora (conseguenza di Weierstrass) f HA MASSIMO

TALE MASSIMO DEVE ESSERE ASSUNTO IN UN PTO STAZIONARIO E QUINDI IN $\pm(1/2, 1/4)$. Ne segue

$$\max_D f = f(1/2, 1/4) = \ln(2) - \frac{1}{4} - \frac{4}{16} = \boxed{\ln(2) - \frac{1}{2}}$$

4. Si consideri la serie di potenze $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$.

(a) Si trovi il raggio di convergenza R della serie (1p.)

Applicando la definizione $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 1$

da cui $R = 1$.

(b) Si trovi l'insieme I dei punti in $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie converge, cioè l'insieme delle x per cui $f(x)$ è definita. (1p.)

Per la teoria so che la serie converge se $-1 < x < 1$ e non converge per $x > 1$ e per $x < -1$. Rimangono $x = \pm 1$.
Se $x = 1$ la serie diventa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ che diverge (armonica)
Se $x = -1$ trovo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ che converge per Leibniz.

DUNQUE $\boxed{I = [-1, 1[}$

(c) Si faccia vedere che per $-R < x < R$ si ha $f(x) + xf'(x) = \dfrac{1}{1-x}$ (2p.)

Usando i teoremi di derivazione per le serie di potenze:

$$f(x) + x f'(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{1+n} + x \sum_{0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n+1} = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} + \sum_{0}^{\infty} \frac{n x^n}{n+1}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n} x^n + \frac{n}{1+n} x^n \right) = \sum_{0}^{\infty} \frac{1+n}{1+n} x^n = \sum_{0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

(SERIE GEOMETRICA !!)

NOTA CHE $\qquad f(x) + x f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(x f(x)\right)$

(d) Si trovi la somma $f(x)$ per $-R < x < R$. (2p.)

Dal passo precedente, se $-1 < x < 1$, si ha:

$$\frac{d}{dx}\left(x f(x)\right) = \frac{1}{1-x} \implies x f(x) = -\ln(1-x) + c\,.$$

Se metto $x=0$ trovo $0 = c$ da cui

$$x f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \text{ e quindi } f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

NOTA CHE QUESTA FORMULA VALE SE $x \neq 0$ (e $-1 < x < 1$). PERÒ SE $x = 0$ POSSIAMO "LEGGERE" IL TERMINE A DESTRA COME

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\ln(1-x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x + o(x)}{x} = 1$$ (che torna se si mette $x=0$ nella serie)

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando una delle caselle (1 punto ciascuno).

(a) Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua che ammetta derivate direzionali in un punto $x_0 \in \Omega$. Allora, per ogni $\vec{v}$ e $\vec{w}$, si ha $f'(x_0)(\vec{v} + \vec{w}) = f'(x_0)(\vec{v}) + f'(x_0)(\vec{w})$ VERO ~~FALSO~~.

(b) L'insieme $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{xy} + x^2 y = 0\}$ è grafico di una funzione $y = f(x)$.
~~VERO~~ FALSO.
$x > 0$

(c) Se f_n sono funzioni derivabili su $[a, b]$ e se f_n converge uniformemente ad f, allora f è derivabile.
VERO ~~FALSO~~.

(d) Sia $\vec{f}(x, y)$ un campo vettoriale definito su $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\}$. Se $\vec{f}$ è conservativo deve essere $\operatorname{rot}(\vec{f}) = 0$. ~~VERO~~ FALSO.

COGNOME E NOME:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 15 settembre 2014. Secondo foglio.

6. Si consideri il problema di Cauchy

$$y' = \frac{2xy^2(1-y)}{x^2y^2+1}, \qquad y(x_0) = y_0.$$

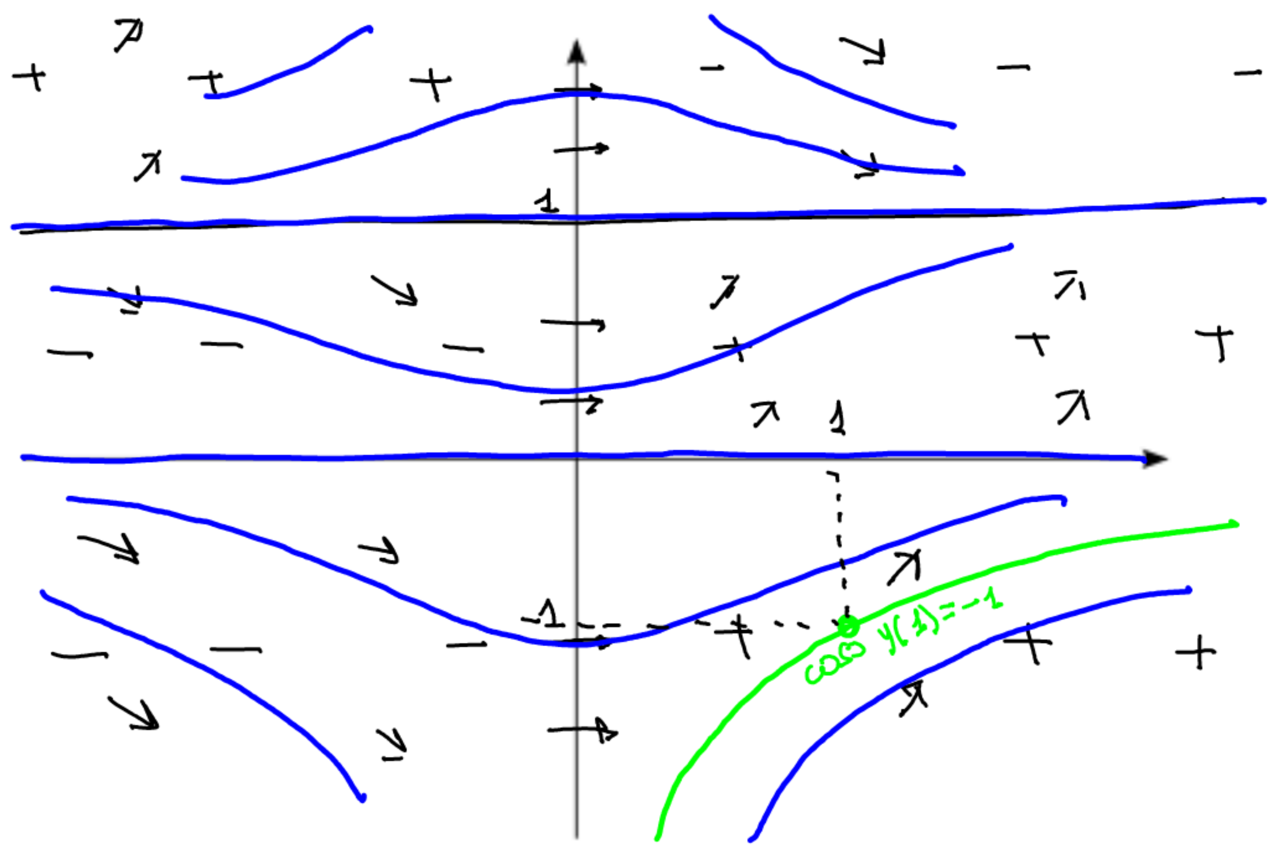
(a) Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino inoltre le soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione cresce o decresce, riportando queste informazioni nel diagramma sottostante (2p.).

Poniamo $F(x,y) = \frac{2xy^2(1-y)}{x^2y^2+1}$ (dunque l'equazione si scrive $y' = F(x,y)$)

Dato che F è derivabile con continuità in y e in x vale il teorema di Cauchy per ogni (x_0, y_0). Per vedere zone di crescenza/decresc. delle soluzioni basta vedere il segno di $F(x,y)$, che (si vede subito) coincide con il segno di $x(y-1)$ (il resto è ≥ 0)

Dunque l'andamento è quello mostrato sotto.

Inoltre $y=0$ e $y=1$ sono le (uniche) soluzioni costanti



(b) Si trovi un fattore integrante per l'equazione, avente la forma $\lambda(x, y) = \lambda(y)$ (2p.).

λ deve verificare $\frac{\partial}{\partial y}\lambda(y)(2xy^2(y-1)) = \frac{\partial}{\partial x}\lambda(y)(1+x^2y^2) \iff$

$\lambda'(y)2xy^2(y-1) + \lambda(y)(6xy^2 - 4xy) = \lambda(y)2xy^2 \iff$

$\lambda'(y)2xy^2(y-1) = \lambda(y)(4xy - 4xy^2) \iff \lambda'(y)2xy^2(y-1) = \lambda(x)4xy(1-y)$

$\iff \lambda'(y) = -\frac{2}{y}\lambda(y)$. Questo è un'equazione diff. lineare in λ che ha soluzione $\lambda(y) = \frac{c}{y^2}$. Dunque posso prendere $\boxed{\lambda(y) = \frac{1}{y^2}}$

(c) Si trovi un integrale primo per l'equazione (2p.).

Prendo un potenziale $\phi(x,y)$ per il campo $2x(y-1)\vec{i} + \left(\frac{1}{y^2} + x^2\right)\vec{j}$.

Deve essere $\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2x(y-1)$ da cui $\Phi(x,y) = x^2(y-1) + c(y)$.

Ne segue $\frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2 + c'(y)$ che deve essere eguale a $\frac{1}{y^2} + x^2$ da cui $c(y) = -\frac{1}{y} + c$. IN DEFINITIVA UN POT. È $\boxed{\Phi(x,y) = x^2(y-1) - \frac{1}{y}}$

DUNQUE, se y risolve l'equazione $\Rightarrow$ $x^2(y(x) - 1) - \frac{1}{y(x)}$ è costante

(d) Si trovi un'espressione per la soluzione che parte da $(1, -1)$, individuandone anche l'intervallo di esistenza massimale e i limiti di $y(x)$ agli estremi di tale intervallo; si disegni il grafico di $y(x)$ nel diagramma sopra (4p.).

Dato che $\phi(1,-1) = -1$, la soluzione che parte da $(1,-1)$ verifica

$x^2(y(x)-1) = \frac{1}{y(x)} - 1 \iff x^2(y(x)-1) = \frac{(1-y(x))}{y(x)}$. Dato che $y(x) \neq 1$ (almeno vicino a $x=1$, poi lo si ricava $\forall x$) si ha $x^2 = -\frac{1}{y(x)}$ che significa $y(x) = -\frac{1}{x^2}$. DUNQUE L'INTERVALLO MASSIMALE È $]0,+\infty[$

e $\lim_{x\to 0^+} y(x) = -\infty$ mentre $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$ (GRAFICO IN VERDE)

7. Siano:

$$\vec{f}(x,y,z) := (z\cos(x^2)+\sin(yz))\mathbf{i} + (x^2y^3e^z + \cos(xz))\mathbf{j} + (xz^2\sin(x^2) - 3x^2y^2e^z)\mathbf{k},$$
$$C := \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \le (1-z)^2, 0 \le z \le 1\right\}, \quad B := \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1, z=0\right\}.$$

(a) Esiste sicuramente un potenziale vettore $\vec{F}$ per $\vec{f}$ – perché? (1p.)

Perché $\mathrm{div}(\vec{f})=0$. Infatti

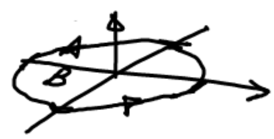
$$\mathrm{div}(\vec{f}) = z(-\sin(x^2))2x + 3x^2y^2e^z + 2xz\sin(x^2) - 3x^2y^2e^z = 0$$

(N.B. Non è richiesto di calcolare $\vec{F}$)

(b) Si calcoli $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s}$ ($\vec{F}$ è il potenziale vettore del punto precedente) dove γ è una curva chiusa che percorre il bordo della "base" B, girando in verso antiorario attorno all'asse z (3p.).

Per il Teorema di Stokes

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_B \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma \quad \text{dove } \vec{\nu} = \vec{k}$$



$$= \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} f_3(x,y,0)\,dx\,dy = \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} -3x^2y^2\,dx\,dy = \text{(coord. polari)}$$

$$-3\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho^2\cos^2\theta\,\rho^2\sin^2\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta = -3\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta =$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\,d\theta = -\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta = -\frac{1}{8}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 4\theta}{8}\right]_0^{2\pi} =$$

$$-\frac{\pi}{8}$$

(c) Si calcoli il flusso (uscente) di $\vec{f}$ su ∂C (1p.).

Dato che $\mathrm{div}(\vec{f})=0$ si ha:

$$\iint_{\partial C} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iiint_C \mathrm{div}\, f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0$$

(d) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ sulla "superficie laterale" $L := \{(x,y,z) : x^2+y^2 = (1-z)^2, 0 \le z \le 1\}$ (orientata allo stesso modo di ∂C – nota che $L \subset \partial C$) (1p).

Dato che $\partial C = L \cup B$ (però su B la normale è $-\vec{k}$)

si ha $0 = \iint_{\partial C} \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \iint_{B} \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma + \iint_{L} \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma$

$\Rightarrow \iint_{L} \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = -\iint_{B} \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \boxed{-\frac{\pi}{8}}$ (calcolo fatto al punto b)

Riguardo alle domande del punto 5

(a) Non è detto che le derivate direzionali siano lineari – questo è vero se la funzione è differenziabile in x_0, se no può essere falso. Per esempio se

$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si ha $f'(0)(\vec{i}) = 0$, $f'(0)(\vec{j}) = 0$

ma $f'(0)(\vec{i}+\vec{j}) = 1$

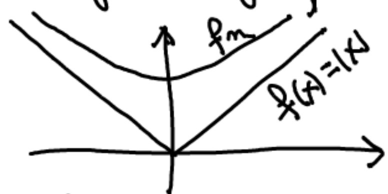
(b) (con $x>0$ nella definizione!) Uso il Dini e derivo rispetto a y

$G(x,y) = e^{xy} + x^2 y \Rightarrow G_y(x,y) = x e^{xy} + x^2$.

Se $x > 0 \Rightarrow x e^{xy} + x^2 > 0 \Rightarrow \{G(x,y)=0, x>0\}$ è un grafico $y = f(x)$

(c) È stato visto a lezione che la convergenza uniforme di f_n a f non implica la derivabilità di f (e a maggior ragione non implica che $f_n' \to f$).

(CI VORREBBE LA CONVERGENZA UNIFORME DELLE f_n' A UNA g)



(d) Se $\vec{f}$ è conservativo $\Rightarrow \mathrm{rot}(\vec{f}) = 0$ SEMPRE.

Potrebbe essere falso "$\Leftarrow$" (e allora conta come è fatto il dominio di $\vec{f}$)