COGNOME:												
NOME:												
MATR.:												

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Esempio di compitino di maggio

1. Sia data la funzione definita da $f(t) := t\sin(t)$ per $-\pi \leq t \leq \pi$ e periodica di periodo 2π.

   (a) Si scriva la serie di Fourier per f.

   (b) Si deduca dal primo punto la somma della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

2. Si consideri l'equazione lineare:

$$x^2y'' - 3y' - 12y = 0$$

Si cerchino le soluzioni del tipo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($y(x)$ serie si potenze centrata in zero).

(a) Si trovi una relazione ricorsiva tra i coefficienti a_n.

(b) Si deduca da quanto sopra che le soluzioni di questo tipo sono polinomi di quarto grado e che se due di queste soluzioni hanno lo stesso valore in zero, allora esse coincidono.

(c) Si scriva poi la (unica per quanto detto sopra) soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = 9$.

3. Sia dato il campo vettoriale $\vec{f}(x,y) = \dfrac{xy^2 e^{xy}}{(1+xy)^2}\mathbf{i} + \dfrac{x^2 y e^{xy}}{(1+xy)^2}\mathbf{j}$.

   (a) Si trovi il dominio di $\vec{f}$ e si dica se $\vec{f}$ è conservativo.

   (b) Data la curva $\gamma(t) = (1+\cos(t))\mathbf{i} + (16 + t\sin(2t))\mathbf{j}$ per $0 \le t \le 2\pi$ si verifichi che $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$ ha senso e se ne calcoli il valore.

   (c) (*) Nel caso di risposta affermativa al primo punto si trovi un potenziale per $\vec{f}$.

4. Siano dati il campo vettoriale bidimensionale $\vec{F}(x,y,z) := -(5x^2y^3+3y^5)\mathbf{i}+(3x^5+5x^3y^2)\mathbf{j}$ e il campo tridimensionale $\vec{f} := f(x,y,z) := (x^3+xz^2+\cos(y^2z))\mathbf{i}+(y^3+2yz^2+\cos(x^2z))\mathbf{i}+15(x^2+y^2)^2\mathbf{k}$.

   (a) Si usi il teorema di Stokes per calcolare $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s}$ dove γ descrive il bordo della circonferenza unitaria percorsa con verso antiorario.

   (b) Si calcoli il flusso (uscente) di $\vec{f}$ attraverlo la superficie $\partial\Omega$ dove $\Omega := \{x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}$.

   (c) Si usi quanto trovato sopra per calcolare $\iint_S \vec{f}\cdot\nu\, d\sigma$ dove $S = \{x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\}$ (orientata anch'essa secondo la direzione uscente da Ω – si noti che $S \subset \partial\Omega$).