COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Esempio di compitino di maggio

1. Sia data la funzione definita da $f(t) := t\sin(t)$ per $-\pi \leq t \leq \pi$ e periodica di periodo $2\pi$.

   (a) Si scriva la serie di Fourier per $f$.

Cerchiamo la forma complessa della serie usando $\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$.

Abbiamo $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{4\pi i}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} t e^{i(1-n)t}\,dt}_{c_{n,1}} - \frac{1}{4\pi i}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} t e^{-i(1+n)t}\,dt}_{c_{n,2}}$.

Se $n=1$, $c_{n,1} = \int_{-\pi}^{\pi} t\,dt = 0$, se $n \neq 1$ $c_{n,1} = \left[\frac{t e^{i(1-n)t}}{i(1-n)}\right]_{-\pi}^{\pi} - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(1-n)t}}{i(1-n)}\,dt}_{=0 \text{ per periodicità}} =$

$= \frac{\pi e^{i(1-n)\pi} + \pi e^{i(1+n)\pi}}{i(1-n)} = \boxed{\frac{2\pi\cos((1-n)\pi)}{-i(n-1)}}$. ANALOGAMENTE

se $n=-1$ $c_{n,2} = 0$, se $n \neq -1$ $c_{n,2} = \left[\frac{t e^{-i(n+1)t}}{-i(n+1)}\right]_{-\pi}^{\pi} - 0 =$

$= \frac{\pi e^{-i(n+1)\pi} + \pi e^{i(n+1)\pi}}{-i(n+1)} = \boxed{\frac{2\pi\cos((n+1)\pi)}{-i(n+1)}}$. DUNQUE $c_n = \frac{c_{n,1} - c_{n,2}}{4\pi i} =$

$\frac{1}{4\pi i}\frac{2\pi}{-i}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{-(-1)^n}{n^2-1}$ se $n \neq \pm 1$, mentre $c_1 = c_{-1} = -1$. DUNQUE

$f(t) = 1 - \frac{1}{4}e^{it} - \frac{1}{4}e^{-it} - \sum_{|n|\geq 2} \frac{(-1)^n}{n^2-1} e^{int} = \boxed{1 - \frac{1}{2}\cos(t) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2-1}\cos(nt)}$

FORMA REALE: $a_n = \begin{cases} c_0 & \text{se } n=0 \\ 2\,\mathrm{Re}\, c_n & \text{se } n>0 \end{cases}$

$b_n = 0$ ($f$ è pari)

   (b) Si deduca dal primo punto la somma della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

Metto $t = \pi$ nella formula sopra e trovo:

$0 = f(\pi) = 1 - \frac{1}{2}\cos(\pi) - 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}\cos(n\pi) =$

$1 + \frac{1}{2} - 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2-1} = \frac{3}{2} - 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ DUNQUE

$$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}}$$

2. Si consideri l'equazione lineare:

$$x^2y'' - 3y' - 12y = 0$$

Si cerchino le soluzioni del tipo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($y(x)$ serie si potenze centrata in zero).

(a) Si trovi una relazione ricorsiva tra i coefficienti $a_n$.

Se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ e

$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \Rightarrow x^2 y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n$

IMPONENDO L'EQUAZIONE:

$\sum_{n=0}^{\infty} \{(n(n-1)-12) a_n - 3(n+1) a_{n+1}\} x^n = 0$ che ci dà la rel. ricorsiva:

$a_{n+1} = \frac{n^2 - n - 12}{3(n+1)} a_n$ . Dato che le radici di $n^2 - n - 1$ sono 4 e −3 $\Rightarrow$

(R) $\boxed{a_{n+1} = \frac{(n+3)(n-4)}{3(n+1)} a_n}$

(andava bene anche la precedente – però per il punto successivo serve questo)

(b) Si deduca da quanto sopra che le soluzioni di questo tipo sono polinomi di quarto grado e che se due di queste soluzioni hanno lo stesso valore in zero, allora esse coincidono.

Se mettiamo $n = 4$ nella (R) troviamo $a_5 = 0$ e allora, usando (R) da $n = 5$ in poi troviamo $a_n = 0$ $\forall n \geq 5$. DUNQUE $y(x)$ è un polinomio di grado 4 ed è univocamente determinato da $a_0 = y(0)$.

(c) Si scriva poi la (unica per quanto detto sopra) soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = 9$.

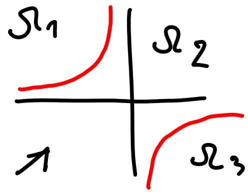
Se $y(0) = \boxed{9} = a_0$, mettendo $n=0$ in (R) $\Rightarrow$ $a_1 = -\frac{12}{3} a_0 = \boxed{-36}$. Mettendo $n=1$ $a_2 = \frac{-36 \cdot 4 \cdot (-3)}{3 \cdot 2} = \boxed{72}$. Mettendo $n=2$ $a_3 = \frac{72 \cdot 5 (-2)}{3 \cdot 3} = \boxed{-80}$.

Mettendo infine $n=3$ $a_4 = \frac{-80 \cdot 6 \cdot (-1)}{3 \cdot 4} = \boxed{40}$. IN DEFINITIVA

$$\boxed{y(x) = 9 - 36x + 72x^2 - 80x^3 + 40x^4}$$

3. Sia dato il campo vettoriale $\vec{f}(x,y) = \frac{xy^2e^{xy}}{(1+xy)^2}\mathbf{i} + \frac{x^2ye^{xy}}{(1+xy)^2}\mathbf{j}$.

(a) Si trovi il dominio di $\vec{f}$ e si dica se $\vec{f}$ è conservativo.




IL DOMINIO È $\{xy \neq -1\}$ che è un insieme sconnesso fatto di tre pezzi connessi e semplicemente connessi $\Omega_1/\Omega_2/\Omega_3$

Si ha $\frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y) = \frac{2xy\, e^{xy} + xy^2 x e^{xy}}{(1+xy)^2} + xy^2 e^{xy} \frac{-2x}{(1+xy)^3} =$

$\left(\frac{2xy + x^2y^2}{(1+xy)^2} - \frac{2x^2y^2}{(1+xy)^3}\right) e^{xy}$. TUTTO È SIMMETRICO IN $x$ e $y$ $\Rightarrow$

$\frac{\partial}{\partial y} f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x} \Rightarrow \vec{f}$ è irrotazionale $\Rightarrow \vec{f}$ è conservativo su ognuno dei pezzi $\Omega_1/\Omega_2/\Omega_3$

(b) Data la curva $\gamma(t) = (1+\cos(t))\mathbf{i} + (16 + t\sin(2t))\mathbf{j}$ per $0 \le t \le 2\pi$ si verifichi che $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$ ha senso e se ne calcoli il valore.

se $t \in [0, 2\pi]$ si ha $1+\cos(t) \ge 1-1 = 0$ e $16 + t\sin(2t) \ge 16 - 2\pi > 0$ dunque il supporto di $\gamma$ è contenuto in $\Omega_2$. Se $F_2(x,y)$ è un potenziale per $\vec{f}$ su $\Omega_2$ allora $\int_\gamma \vec{f}\, d\vec{s} = F_2(\gamma(2\pi)) - F_2(\gamma(0))$

MA $\gamma(2\pi) = (1+\cos(2\pi), 16 + 2\pi \sin(4\pi)) = (2, 16)$ mentre $\gamma(0) = (1+\cos(0), 16 \cdot 0 \cdot \sin(0)) = (2,16)$. DUNQUE $\gamma$ è chiusa da cui $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$

(c) (*) Nel caso di risposta affermativa al primo punto si trovi un potenziale per $\vec{f}$.

Cerchiamo $F(x,y)$: $F_x = f_1$, $F_y = f_2$. La prima condizione ci dà

$F = \int \frac{xy^2 e^{xy}}{(1+xy)^2} dx = (t = xy, dt = y\,dx) = \int \frac{t e^t}{(1+t)^2} dt$. Int. per parti:

$\int \frac{t\, e^t}{(1+t)^2} dt = \frac{-1}{1+t} t e^t + \int \frac{1}{1+t}(e^t + t e^t) = \frac{-te^t}{1+t} + \int e^t dt$ (!!) $=$

$\frac{-t}{1+t} e^t + e^t + c = \frac{e^t}{1+t} + c$ Dunque $F(x,y) = \frac{e^{xy}}{1+xy} + c(y)$

È facile vedere che da $F_y = f_2$ si ricava $F(x,y) = \frac{e^{xy}}{1+xy} + d(x)$

e quindi $F(x,y) = \frac{e^{xy}}{1+xy} + c$ ($c \in \mathbb{R}$ può essere diverso su $\Omega_1/\Omega_2/\Omega_3$)

4. Siano dati il campo vettoriale bidimensionale $\vec{F}(x,y,z) := -(5x^2y^3+3y^5)\mathbf{i}+(3x^5+5x^3y^2)\mathbf{j}$ e il campo tridimensionale $\vec{f} := f(x,y,z) := (x^3+xz^2+\cos(y^2z))\mathbf{i}+(y^3+2yz^2+\cos(x^2z))\mathbf{i}+15(x^2+y^2)^2\mathbf{k}$.

(a) Si usi il teorema di Stokes per calcolare $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s}$ dove $\gamma$ descrive il bordo della circonferenza unitaria percorsa con verso antiorario.

Sia $D=\{x^2+y^2\le 1\}$, allora $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_D (F_{2,x}-F_{1,y})\,dx\,dy =$

$\iint_D (15x^4+15x^2y^2+15x^2y^2+15y^4)\,dx\,dy = 15\iint_D (x^2+y^2)^2\,dx\,dy =$

(PASSO IN COORDINATE POLARI) $15\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\,\rho^4\,d\rho = 30\pi\left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 =$

$5\pi$

(b) Si calcoli il flusso (uscente) di $\vec{f}$ attraverlo la superficie $\partial\Omega$ dove $\Omega := \{x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge 0\}$.

Per il teorema della divergenza

$\iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div}(\vec{f})\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega (3x^2+z^2+3y^2+2z^2)\,dx\,dy\,dz$

$= \iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz =$ (PASSO A COORDINATE SFERICHE) $=$

$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi)\,d\varphi \int_0^1 3\rho^2\cdot\rho^2\,d\rho = 2\pi\cdot 1\cdot 3\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 = \frac{6}{5}\pi$

(c) Si usi quanto trovato sopra per calcolare $\iint_S \vec{f}\cdot\nu\,d\sigma$ dove $S=\{x^2+y^2+z^2=1, z\ge 0\}$ (orientata anch'essa secondo la direzione uscente da $\Omega$ – si noti che $S\subset\partial\Omega$).

Notiamo che $\partial\Omega = S + D$ dove $D$ è la base $\{x^2+y^2\le 1\}$ con la normale rivolta verso il basso. Dato che

$\iint_D \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = -\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} F_3(x,y)\,dx\,dy = -\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} 15(x^2+y^2)^2\,dx\,dy = -5\pi$

(a causa del punto a !!) si ricava

$\iint_S \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma - \iint_D \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = \frac{6}{5}\pi + 5\pi = \frac{31}{5}\pi$