COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Esempio di compitino di maggio

1. Siano $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f_n(x) := \dfrac{x^2 e^{-\frac{x}{n}}}{n^2}$. Si risponda ai seguenti quesiti.

   (a) Si dica per quali x la serie converge puntualmente – indichiamo nel seguito con I l'insieme di questi punti e con $F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ la somma della serie, definita per $x \in I$.

   (b) Si dica se F è continua su I.

   (c) Si dica se F è derivabile su I.

(d) (*) Si dica se la serie $\sum_n f_n$ converge uniformemente su I.

2. Sia dato il campo vettoriale $\vec{f}(x,y) = (1 + xy + y^2)e^{xy}\mathbf{i} + (1 + x^2 + xy)e^{xy}\mathbf{j}$ (in $\mathbb{R}^2$).

   (a) Si dica se $\vec{f}$ è conservativo.

(b) Si calcoli l'integrale $\int\limits_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{s}$ dove $\gamma(t) = t\cos(t)\mathbf{i} + 2t\sin(t)\mathbf{j}$, per $0 \le t \le 3\pi$.

(c) Si sfruttino i punti precedenti per trovare un integrale primo per l'equazione differenziale:

$$y' = -\frac{1 + xy + y^2}{1 + xy + x^2}$$

e si trovi la soluzione di tale equazione con $y(1) = -1$.

3. Sia dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y, z) := (-3x^2 y + 2yz)\mathbf{i} + (-2x^3 + ze^{yz} + 2xz)\mathbf{j} + ye^{yz}\mathbf{k}.$$

Si usi il teorema di Stokes per calcolare l'integrale $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$, dove

$$\gamma(t) = 2\cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j} + (4\cos^2(t) - \sin^2(t))\mathbf{k},$$

per $0 \le t \le 2\pi$. Si noti che γ giace sulla superficie $\{z = x^2 - y^2\}$ e che la sua proiezione sull'asse xy è l'ellisse $\{x^2 + 4y^2 = 4\}$.