COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Esempio di compitino di maggio

1. Siano $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f_n(x) := \dfrac{x^2 e^{-\frac{x}{n}}}{n^2}$. Si risponda ai seguenti quesiti.

   (a) Si dica per quali x la serie converge puntualmente – indichiamo nel seguito con I l'insieme di questi punti e con $F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ la somma della serie, definita per $x \in I$.

$I = \mathbb{R}$, infatti se x è fissato $\Rightarrow f_n(x) \simeq \frac{x^2}{n^2}$ (dato che $e^{-\frac{x}{n}} \to e^0 = 1$) e $\sum_n \frac{x^2}{n^2}$ converge

   (b) Si dica se F è continua su I.

Fissiamo $M > 0$ e dimostriamo che $\sum f_n$ converge totalmente su $[-M, M]$. In effetti se $|x| \leq M$ si ha $|f_n(x)| \leq \frac{M^2 e^{\frac{M}{n}}}{n^2} \leq \frac{M^2 e^M}{n^2}$ e $\sum_n \frac{M^2 e^M}{n^2}$ converge.

Dunque $\sum_n f_n$ converge uniformemente su $[-M, M] \Rightarrow$ $F(x)$ è continua su $[-M, M]$. Dato che M è arbitrario $F(x)$ è continua in ogni $x \in \mathbb{R}$

   (c) Si dica se F è derivabile su I.

Basta dimostrare che $\sum_n f'_n$ converge totalmente su $[-M, M]$ per ogni $M > 0$ fissato. Dato che $f'_n(x) = \left(2x - \frac{x^2}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow \quad |f'_n(x)| \leq \left(2M + \frac{M^2}{n}\right) e^{M/n} \frac{1}{n^2} \quad$ per $|x| \leq M$

$\leq \dfrac{(2M+M^2)e^M}{m^2}$. Dunque $\sum_m \max_{|x|\leq M} |f'(x)|$ converge

$\Rightarrow \sum f'_m$ conv. unif. su $[-M,M] \Rightarrow F$ è derivabile

su $[-M,M] \Rightarrow F$ è derivabile in ogni x

(d) (*) Si dica se la serie $\sum_n f_n$ converge uniformemente su I.

Se convergesse uniformemente su $\mathbb{R}$ allora $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \sum_m \lim_{x\to\infty} f_m(x)$

$= \sum_m 0 = 0$. Però se prendo $x = m$, con m intero $\Rightarrow$

$F(m) = \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{m^2}{m^2} e^{-\frac{m}{m}} \geq$ (termine m-esimo $=$) $\dfrac{m^2}{m^2} e^{-\frac{m}{m}}$

$= \dfrac{1}{e}$. Dunque $F(m) \geq \dfrac{1}{e}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ e quindi

F non può tendere a zero per $m \to +\infty$. DUNQUE

$\sum_m f_m$ NON CONVERGE UNIFORMEMENTE

2. Sia dato il campo vettoriale $\vec{f}(x,y) = (1+xy+y^2)e^{xy}\mathbf{i} + (1+x^2+xy)e^{xy}\mathbf{j}$ (in $\mathbb{R}^2$).

(a) Si dica se $\vec{f}$ è conservativo.

$$\frac{\partial}{\partial y}(1+xy+y^2)e^{xy} = (x+2y)e^{xy} + x(1+xy+y^2)e^{xy} = (2x+2y+x^2y+xy^2)e^{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(1+xy+x^2)e^{xy} = (y+2x)e^{xy} + y(1+xy+x^2)e^{xy} = (2y+2x+xy^2+x^2y)e^{xy}$$

Poiché le due espressioni sono uguali il campo è irrotazionale – siccome il dominio è $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso, $\Rightarrow$ il campo è conservativo

(b) Si calcoli l'integrale $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$ dove $\gamma(t) = t\cos(t)\mathbf{i} + 2t\sin(t)\mathbf{j}$, per $0 \le t \le 3\pi$.

Cerchiamo un potenziale $F(x,y)$. Dovrà essere

$F_x = (1 + xy + y^2)e^{xy} \Rightarrow F = \frac{(1+y^2)}{y} e^{xy} + \int xy e^{xy} dx =$

$\left(\frac{1}{y} + y\right) e^{xy} + xy \frac{e^{xy}}{y} - \int e^{xy} dx = \left(\frac{1}{y} + y + x\right) e^{xy} - \frac{e^{xy}}{y} =$

$(x+y)e^{xy} + c(y)$. Analogamente da $F_y = (1 + xy + x^2)e^{xy}$

si trova $F = (x+y)e^{xy} + d(x) \Rightarrow \boxed{F(x,y) = (x+y)e^{xy} + c}$

$\Rightarrow \int_\gamma \vec{f} d\vec{s} = F(\gamma(0)) - F(\gamma(3\pi)) = F(-3\pi, 0) - F(0,0) = -3\pi$

(c) Si sfruttino i punti precedenti per trovare un integrale primo per l'equazione differenziale:

$$y' = -\frac{1 + xy + y^2}{1 + xy + x^2}$$

e si trovi la soluzione di tale equazione con $y(1) = -1$.

Dato che $-\frac{1 + xy + y^2}{1 + xy + x^2} = -\frac{(1 + xy + y^2)e^{xy}}{(1 + xy + x^2)e^{xy}} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$

$\Rightarrow F$ è un integrale primo per l'equazione, cioè se

$y(x)$ è soluzione deve essere $(x + y(x))e^{xy(x)} = c$.

Se $y(1) = -1 \Rightarrow (1 - 1)e^{-1} = c \Rightarrow c = 0$ e quindi

$(x + y(x))e^{xy(x)} = 0 \Leftrightarrow \boxed{y(x) = -x}$

3. Sia dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y, z) := (-3x^2y + 2yz)\mathbf{i} + (-2x^3 + ze^{yz} + 2xz)\mathbf{j} + ye^{yz}\mathbf{k}.$$

Si usi il teorema di Stokes per calcolare l'integrale $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$, dove

$$\gamma(t) = 2\cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j} + (4\cos^2(t) - \sin^2(t))\mathbf{k},$$

per $0 \le t \le 2\pi$. Si noti che γ giace sulla superficie $\{z = x^2 - y^2\}$ e che la sua proiezione sull'asse xy è l'ellisse $\{x^2 + 4y^2 = 4\}$.

Calcoliamo il rotore di $\vec{F}$: $\vec{f} := rot(\vec{F})$. Si ha:

$$f_1 = \left(\frac{\partial}{\partial y}(ye^{yz}) - \frac{\partial}{\partial z}(-2x^3 + ze^{yz} + 2xz\right) = ye^{yz} + yze^{yz} - e^{yz} - zye^{yz} - 2x = -2x$$

$$f_2 = \frac{\partial}{\partial z}(-3x^2y + 2yz) - \frac{\partial}{\partial x} ye^{yz} = 2y$$

$$f_3 = \frac{\partial}{\partial x}(-2x^3 + ze^{yz} + 2xz) - \frac{\partial}{\partial y}(-3x^2y + 2yz) = -6x^2 + 2z + 3x^2 - 2z = -3x^2$$

Per usare Stoke vediamo γ come bordo di S, dove

$S = \{x^2 + 4y^2 \leq 4, z = x^2 - y^2\}$ che è parametrizzata da

$T(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}$ con $(u,v) \in D = \{x^2 + 4y^2 \leq 4\}$.

Dato che T è cartesiana $\Rightarrow$ $T_u \otimes T_v = \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix}$ e allora

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \iint_D \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ -3u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix} du\,dv = \iint_D (u^2 + 4v^2)\, du\,dv$$

In coordinate ellittiche $u = 2\rho\cos(\theta)$ $v = \rho \sin\theta$ si ha:

$J = \begin{pmatrix} 2\cos\theta, & -2\rho\sin\theta \\ \sin\theta, & \rho\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \det J = 2\rho$, $D \rightsquigarrow \{\theta \in [0, 2\pi], 0 \leq \rho \leq 1\}$

$$\Rightarrow \text{INTEGRALE} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 4\rho^2 \cdot 2\rho\, d\rho = 12\pi \int_0^1 \rho^3 = 12\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= 4\pi$$