COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Esempio di compitino di febbraio (B)

1. Si considerino la funzione $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e l'insieme $M \subset \mathbb{R}^2$ definiti da:

$$G(x, y) := e^{xy} - x^2 + 2x, \qquad M := \{(x, y) : G(x, y) = 2\}.$$

   (a) Si faccia vedere che $(1, 0) \in M$ e che vicino a $(1, 0)$ M è il grafico di una funzione $y = g(x)$ (2p.)

   (b) Si trovino $g'(1)$ (2p.) e (*) $g''(1)$ (3p.):

2. Sia data la funzione di due variabili:

$$f(x, y) := \ln(xy - 1) - 2(x + y)^2.$$

(a) Si trovi il dominio D di f (1p.) e tutti i punti critici di f (2p.):

(b) per ognuno dei punti trovati sopra, si dica se si tratta di massimi, minimi o selle (2p.):

(c) (*) si trovino i punti critici di f vincolati all'insieme $S := D \cap \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25/6\}$ (3p.) e si dica se f ha massimo su S (1p.):

3. Siano

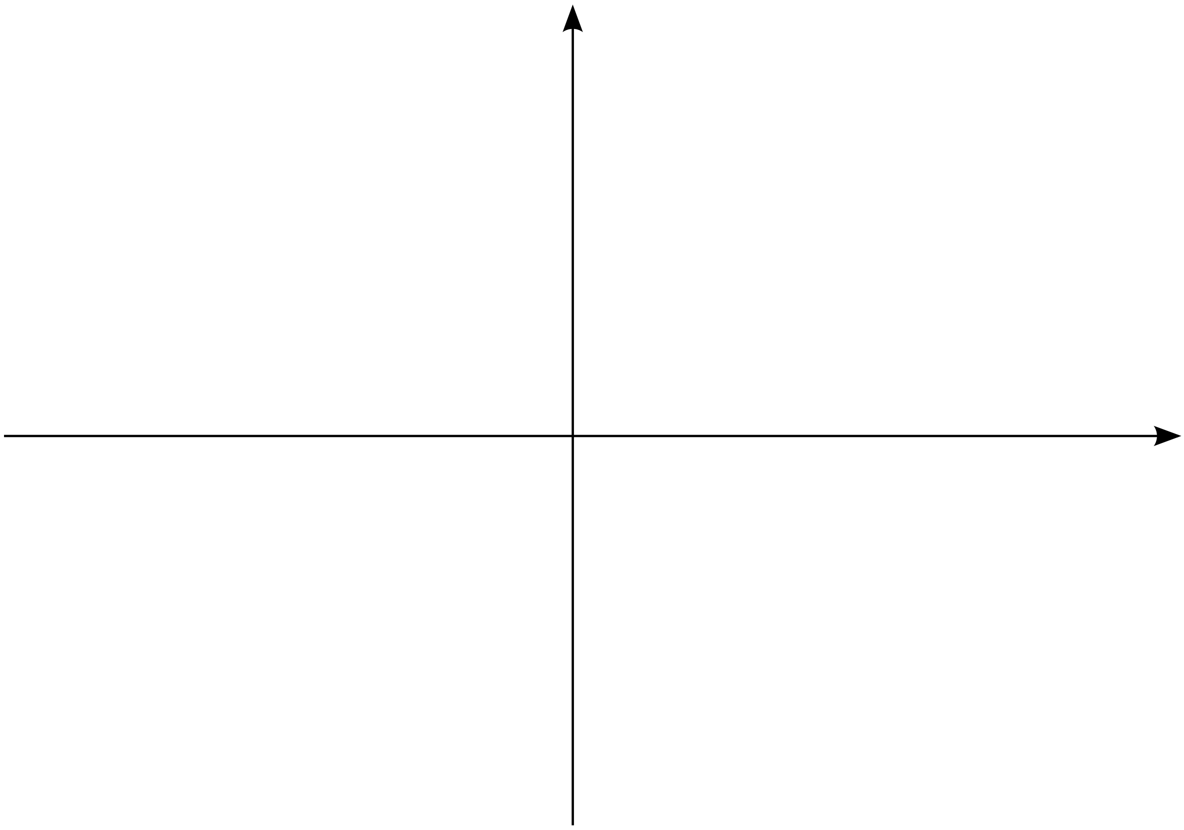
$$D := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, 0 \leq z \leq \sqrt{2}(x^2 + y^2)\}, \qquad f(x, y, z) := \frac{zx}{x^2 + y^2}.$$

Si calcoli l'integrale (improprio) $\iiint\limits_D f(x, y, z)\, dx dy dz$ (7p.).

4. Dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(y-2)\sqrt{e^y - 1}}{x} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(a) Si trovi il sottoinsieme del piano cartesiano Ω per cui vale il teorema di esistenza e unicità locali (cioè tale che, se $(x_0, y_0) \in \Omega$, esiste unica $y(x)$ soluzione del problema, definita per x vicino a x_0). Si trovino inoltre i sottoinsiemi Ω^+ e Ω^- dai quali $y(x)$ parte con derivata positiva e con derivata negativa. Si disegnino questi insiemi nello spazio sottostante (1p).



(b) Si dica se ci sono soluzioni costanti. (1p.)

(c) Consideriamo il caso $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Si disegni la soluzione $y :]\underline{x}, \overline{x}[\to \mathbb{R}$ nel piano cartesiano riportato sopra, spiegando se i tempi di esistenza massimale $\underline{x}$ e $\overline{x}$ sono finiti o infiniti. (6p.) Suggerimento: in questo caso si può scrivere una formula per l'espressione di $y(x)$, la quale, anche se non completamente esplicita (certi integrali non si possono calcolare), permette di rispondere al quesito.

(d) Stessa domanda del punto precedente (e stesso suggerimento) se $(x_0, y_0) = (1, 4)$ (6p.).