COGNOME: | | | | | | | | | | | | |

NOME: | | | | | | | | | | | | |

MATR.: | | | | | | |

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Esempio di compitino di febbraio (B)

1. Si considerino la funzione $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e l'insieme $M \subset \mathbb{R}^2$ definiti da:

$$G(x,y) := e^{xy} - x^2 + 2x, \qquad M := \{(x,y) : G(x,y) = 2\}.$$

(a) Si faccia vedere che $(1,0) \in M$ e che vicino a $(1,0)$ M è il grafico di una funzione $y = g(x)$ (2p.)

Si ha $G(1,0) = e^{1\cdot 0} - 1 + 2 = 2 \Rightarrow (1,0) \in M$.

Inoltre $\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = x e^{xy} \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial y}(1,0) = 1 \neq 0$

Per il teorema del Dini esiste $\varepsilon > 0$, esiste g definita per $x \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ ed esiste un intorno U di $(1,0)$, tali che

$U \cap M = \{(x, g(x)) : 1-\varepsilon < g(x) < 1+\varepsilon\}$.

NOTA CHE $g(1) = 0$

(b) Si trovino $g'(1)$ (2p.) e (*) $g''(1)$ (3p.):

Si ha $\frac{\partial G}{\partial x} = y e^{xy} - 2x + 2$, da cui, sempre per il Dini

$$g'(x) = -\frac{\partial G}{\partial x}(x, g(x)) \Big/ \frac{\partial G}{\partial y}(x, g(x)) = -\frac{g(x) e^{xg(x)} - 2x + 2}{x e^{xg(x)}} =$$

$$\frac{g(x)}{x} - 2\left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-xg(x)} \Rightarrow g'(1) = \frac{0}{1} - 2(1-1)e^0 = \underline{\underline{0}}$$

DERIVANDO $g'(x) \Rightarrow$

$$g''(x) = \frac{g'(x)}{x} - \frac{g(x)}{x^2} - \frac{2}{x^2} e^{-xg(x)} - 2\left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-xg(x)} \left(-g(x) - xg'(x)\right)$$

$$\Rightarrow g''(1) = \underbrace{\frac{g'(1)}{1}}_{=0} - \underbrace{\frac{g(1)}{1}}_{=0} - \frac{2}{1} e^{-g(1)} - \underbrace{2\left(1 - \frac{1}{1}\right)}_{=0} e^{-g(1)} \left(-g(1) - g'(1)\right)$$

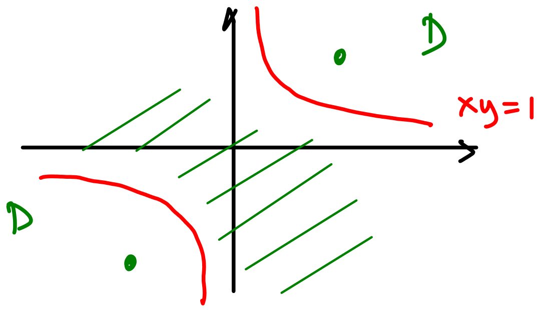
$$= 2e^0 = \underline{\underline{2}}$$

2. Sia data la funzione di due variabili:

$$f(x,y) := \ln(xy-1) - 2(x+y)^2.$$

(a) Si trovi il dominio D di f (1p.) e tutti i punti critici di f (2p.):

$D = \{(x,y) : xy-1>0\}.$



$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{xy-1} - 4(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{xy-1} - 4(x,y)$$

Se $\nabla f = 0 \iff \begin{cases} \frac{y}{xy-1} = 4(x+y) \\ \frac{x}{xy-1} = 4(x,y) \end{cases} \implies x = y$ da cui $\frac{x}{x^2-1} = 8x$

$\implies x = 0$ (non accettabile dato che $(0,0) \notin D$) oppure

$1 = 8(x^2-1) \iff x = \pm \frac{3}{4}\sqrt{2} \implies$ PTI CRITICI $= \pm\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$

(b) per ognuno dei punti trovati sopra, si dica se si tratta di massimi, minimi o selle (2p.):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-y^2}{(xy-1)^2} - 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-x^2}{(xy-1)^2} - 4$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{xy-1-xy}{(xy-1)^2} - 4 = \frac{-1}{(xy-1)^2} - 4$$

Da cui la matrice Hessiana in $\pm\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}, \frac{3}{4}\sqrt{2}\right)$ è

$$H = \begin{pmatrix} \frac{-9/8}{(1/8)^2} - 4, & \frac{-1}{(1/8)^2} - 4 \\ \frac{-1}{(1/8)^2} - 4 & \frac{-9/8}{(1/8)^2} - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -76 & -68 \\ -68 & -76 \end{pmatrix}$$

$\implies \det(H) = 76^2 - 68^2 > 0$, $\operatorname{tr}(H) < 0$ dunque

$\pm \frac{3}{4}\sqrt{2}(1,1)$ sono massimi relativi

(NOTA: IN REALTÀ $f(x,y) \to -\infty$ se $(x,y) \to \partial D$ o (x,y) diverge $\implies$ i punti sopra sono massimi assoluti)

(c) (*) si trovino i punti critici di f vincolati all'insieme $S := D \cap \{(x,y) : x^2 + y^2 = 25/6\}$ (3p.) e si dica se f ha massimo su S (1p.):

Usando i moltiplicatori di Lagrange $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{y}{xy-1} - 4(x+y) = \lambda x \\[2mm] \dfrac{x}{xy-1} - 4(x+y) = \lambda y \\[2mm] x^2+y^2 = 25/6, \quad xy>1 \end{cases}$$

MOLTIPLICO LA I^a riga per y, la II^a per x e faccio la differenza $\Rightarrow$

$$\frac{y^2}{xy-1} - 4\cancel{xy} - 4y^2 = \frac{x^2}{xy-1} - 4x^2 - 4\cancel{xy}$$

$$y^2\left(\frac{1}{xy-1} - 4\right) = x^2\left(\frac{1}{xy-1} - 4\right)$$

$$\Rightarrow (y^2 - x^2)\left(\frac{1}{xy-1} - 4\right) = 0 \iff x^2 = y^2 \text{ OPPURE } xy = \frac{5}{4}$$

Da $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ (siamo in D!) $\Rightarrow x = y = \pm \frac{5}{6}\sqrt{3}$ ($xy>1$!!) $\underline{25}\,3 = \underline{25} >$

L'altra condizione mi dà

$$\begin{cases} xy = \frac{5}{4} \ (>1 \text{ in D!!}) \\ x^2+y^2 = \frac{25}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{5}{4x} \\ x^2 + \frac{25}{16x^2} = \frac{25}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{5}{4x} \\ 16\cdot 6x^4 - 25\cdot 16\cdot x^2 + 25\cdot 6 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 = \frac{25\cdot 16 \pm \sqrt{25^2\cdot 16^2 - 4\cdot 16\cdot 6\cdot 25\cdot 6}}{16\cdot 12} = \frac{25\cdot 16 \pm 5\cdot 16\sqrt{25-9}}{16\cdot 12}$$

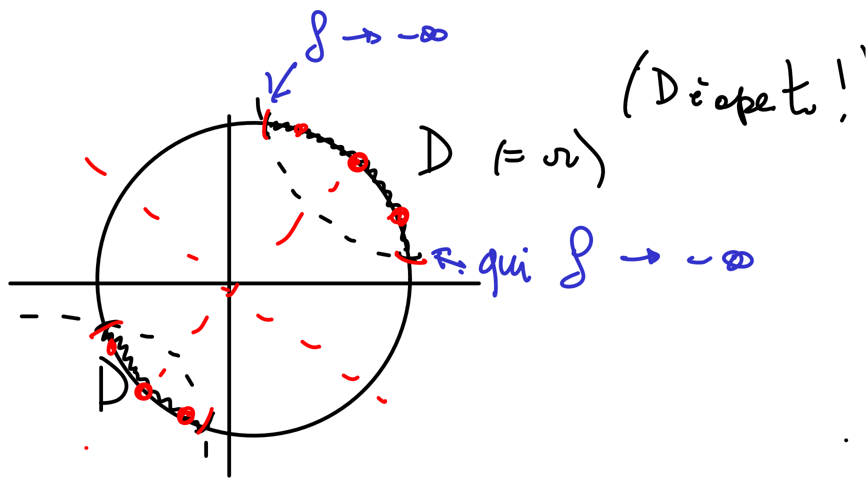
$$= \frac{25\cdot 16 \pm 5\cdot 16\cdot 4}{16\cdot 12} = \frac{25\pm 20}{12} = \begin{cases} \frac{45}{12} = \frac{15}{4} \\ \frac{5}{12} \end{cases} \quad x = \pm\frac{\sqrt{15}}{2} \quad x = \pm\frac{\sqrt{15}}{6}$$

$$(x,y) = \pm\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{5}{2\sqrt{15}}\right)$$

$$(x,y) = \pm\left(\frac{\sqrt{15}}{6}, \frac{5}{4}\frac{6}{\sqrt{15}}\right)$$

TUTTE POSSIBILI

IL MAX esiste perché se $(x,y)\to\partial D$ $f(x,y)\to -\infty$

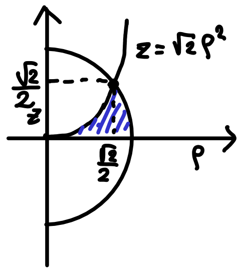


3. Siano

$$D := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1, x \ge 0, 0 \le z \le \sqrt{2}(x^2+y^2)\}, \qquad f(x,y,z) := \frac{zx}{x^2+y^2}.$$

Si calcoli l'integrale (improprio) $\iiint_D f(x,y,z)\, dxdydz$ (7p.).

Passando in coordinate cilindriche : $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$, $(z = z)$ si ha $dxdydz = \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$. D si trasforma in



$$\tilde{D} := \{(\rho,\theta,z) : \rho^2 + z^2 \le 1, \rho\cos\theta \ge 0, 0 \le z \le \sqrt{2}\rho^2\}$$

$$= \{(\rho,\theta,z) : -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le z \le \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{2}} \le \rho \le \sqrt{1-z^2}\}$$

$$\Rightarrow \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\tilde{D}} \rho \frac{z\rho\cos\theta}{\rho^2}\, d\rho\, d\theta\, dz =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\, d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_{\frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{2}}}^{\sqrt{1-z^2}} d\rho \right) z\, dz =$$

ho usato $s = z^2$, $ds = 2z\,dz$ nel I° int

$$\underbrace{\left[\sin(\theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}_{=2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\sqrt{1-z^2} - \frac{\sqrt{z}}{\sqrt[4]{2}}\right) z\, dz = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-s}\, ds - 2^{\frac{3}{4}} \int_0^{2^{-1/2}} z^{3/2}\, dz =$$

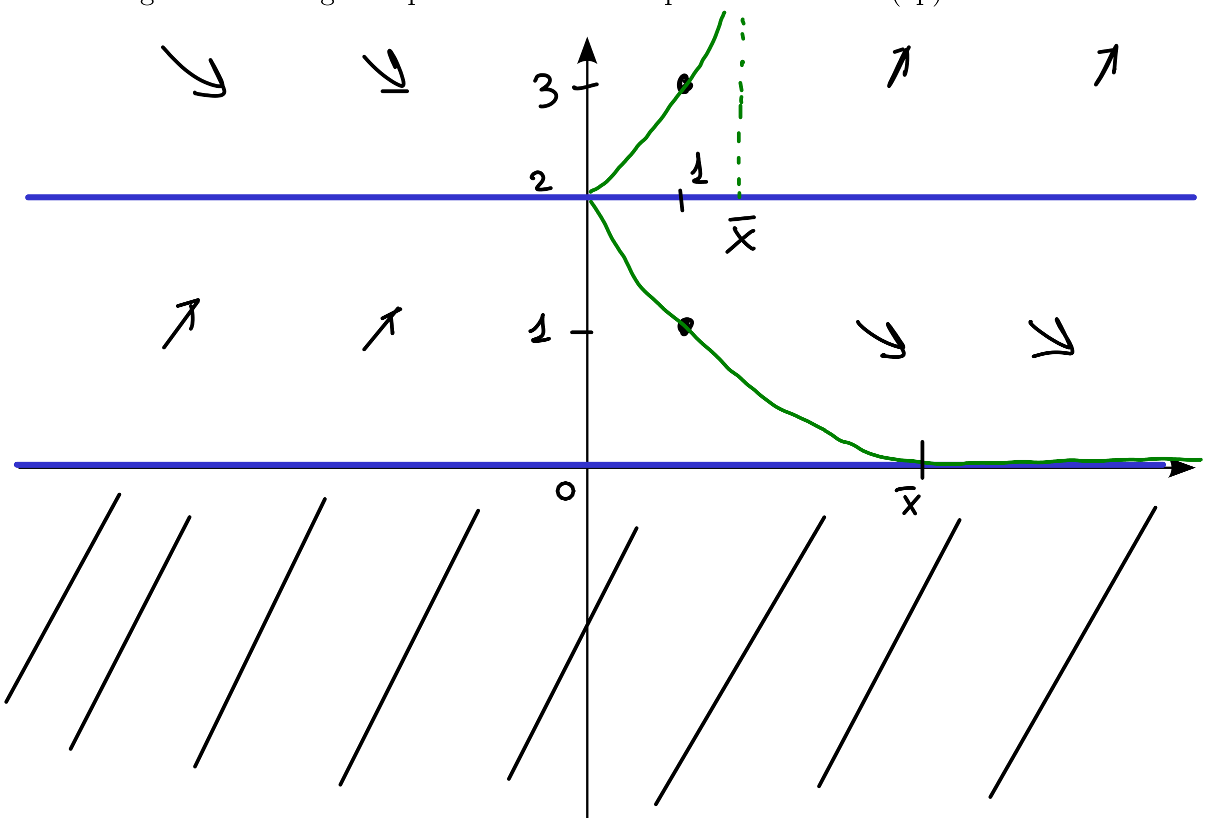
$$= \left[-\frac{(1-s)^{3/2}}{3/2} \right]_0^{1/2} - 2^{3/4} \left[\frac{z^{5/2}}{5/2} \right]_0^{2^{-1/2}} = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2^{3/2}} + 1\right) - 2^{3/4} \cdot \frac{2}{5}\, 2^{-5/4} =$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} 2^{1-3/2} - \frac{1}{5} 2^{\frac{3}{4}+1-\frac{5}{4}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{5}\sqrt{2} = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{5} = \boxed{\frac{2}{3} - \frac{11}{30}\sqrt{2}}$$

4. Dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(y-2)\sqrt{e^y - 1}}{x} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(a) Si trovi il sottoinsieme del piano cartesiano Ω per cui vale il teorema di esistenza e unicità locali (cioè tale che, se $(x_0, y_0) \in \Omega$, esiste unica $y(x)$ soluzione del problema, definita per x vicino a x_0). Si trovino inoltre i sottoinsiemi Ω^+ e Ω^- dai quali $y(x)$ parte con derivata positiva e con derivata negativa. Si disegnino questi insiemi nello spazio sottostante (1p).



$\Omega = \{ y > 0 \}$ $\Omega^+ = \{ y > 2,\ x > 0 \} \cup \{ 0 < y < 2,\ x < 0 \}$

(b) Si dica se ci sono soluzioni costanti. (1p.)

ci sono le due soluzioni costanti

$y(x) = 0, \quad y(x) = 2$

(c) Consideriamo il caso $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Si disegni la soluzione $y :]\underline{x}, \overline{x}[\to \mathbb{R}$ nel piano cartesiano riportato sopra, spiegando se i tempi di esistenza massimale $\underline{x}$ e $\overline{x}$ sono finiti o infiniti. (6p.) Suggerimento: in questo caso si può scrivere una formula per l'espressione di $y(x)$, la quale, anche se non completamente esplicita (certi integrali non si possono calcolare), permette di rispondere al quesito.

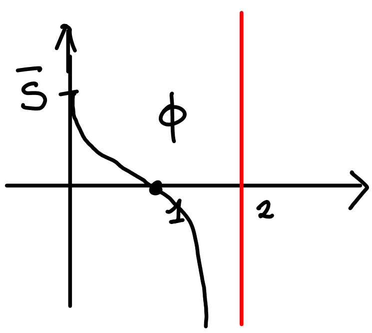
Usando la formula risolutiva $\Rightarrow$

$$\int_1^{y(x)} \frac{ds}{(s-2)\sqrt{e^s - 1}} = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln(x)$$

Poniamo $\phi :]0, 2[\to \mathbb{R}$

$$\phi(y) := \int_1^y \frac{ds}{(s-2)\sqrt{e^s - 1}}$$

Allora ϕ è come nel disegno



Chiaramente ϕ è decrescente su $]0,2[$ perché $\phi'(y) = \frac{1}{(y-2)\sqrt{e^y-1}}$

$\bar{s} = \lim_{y \to 0^+} \phi(x) \in \mathbb{R}$ perché vicino a zero la funzione

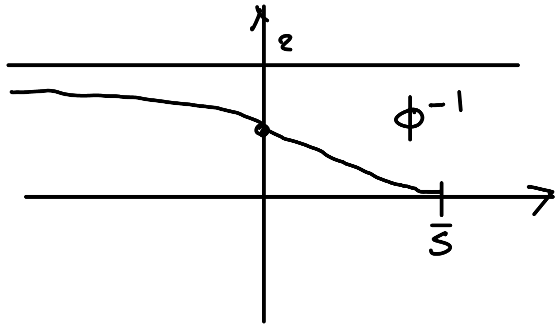
$f(y) = \frac{1}{(y-2)\sqrt{e^y-1}} \simeq -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}$ che è integrabile, $\lim_{y \to 2^-} \phi(y) = -\infty$

perché $f(y) \simeq \frac{c}{y-2}$ vicino a 2, che NON è INTEGRABILE.

Dato che $y(x) = \phi^{-1}(\ln(x))$ si ha

$\underline{x} = 0$, $\lim_{x \to \underline{x}} y(x) = 2$

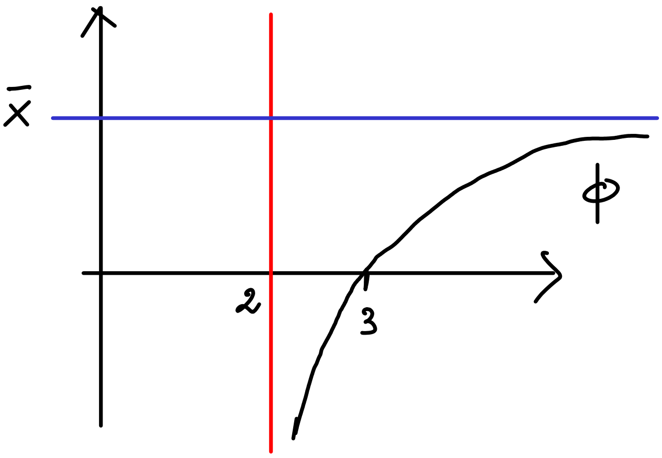
$y(\bar{s}) = 0$ e $y(x) = 0 \ \forall x \geq \bar{s}$ $\quad (\bar{x} = +\infty)$



(d) Stessa domanda del punto precedente (e stesso suggerimento) se $(x_0, y_0) = (1, 4)$ (6p.).

Analogamente al punto precedente prendo $\phi :]2, +\infty[\to \mathbb{R}$

$\phi(y) = \int_3^y \frac{ds}{(s-2)\sqrt{e^s-1}}$



Chiaramente ϕ è crescente,

$\phi(y) \to -\infty$ se $y \to 2^+$

perché l'integrando $\simeq \frac{1}{s-2}$

che non è integrabile vicino a 2,

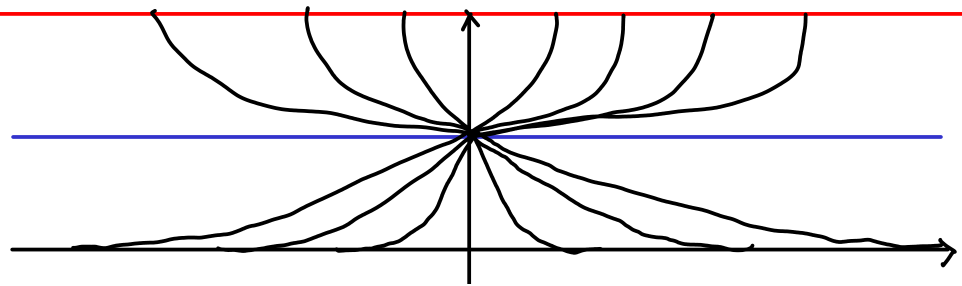
mentre $\lim_{y \to +\infty} \phi(y) = \bar{x} < +\infty$ perché $\bar{x} = \int_3^{+\infty} \frac{ds}{(s-2)\sqrt{e^s-2}} < +\infty$

a causa dell'esponenziale presente al denominatore.

Dunque la sol. $y(x) = \phi^{-1}(\ln(x))$ è definita

per $0 < x < \bar{x}$ $(< +\infty)$ e $\lim_{x \to 0^+} y(x) = 2$ mentre

$\lim_{x \to \bar{x}^-} y(x) = +\infty$ (esplosione in tempo finito)



SITUAZIONE GENERALE