COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Esempio di compitino di febbraio

1. Si consideri a funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Si dica se f è continua in $(0,0)$ (3p.):

(b) Si dica se f è differenziabile in $(0,0)$ (3p.):

2. Sia data la funzione di due variabili:

$$f(x,y) := 4xy - x^2 - y^4.$$

(a) Si trovino tutti i punti critici di f (1p.):

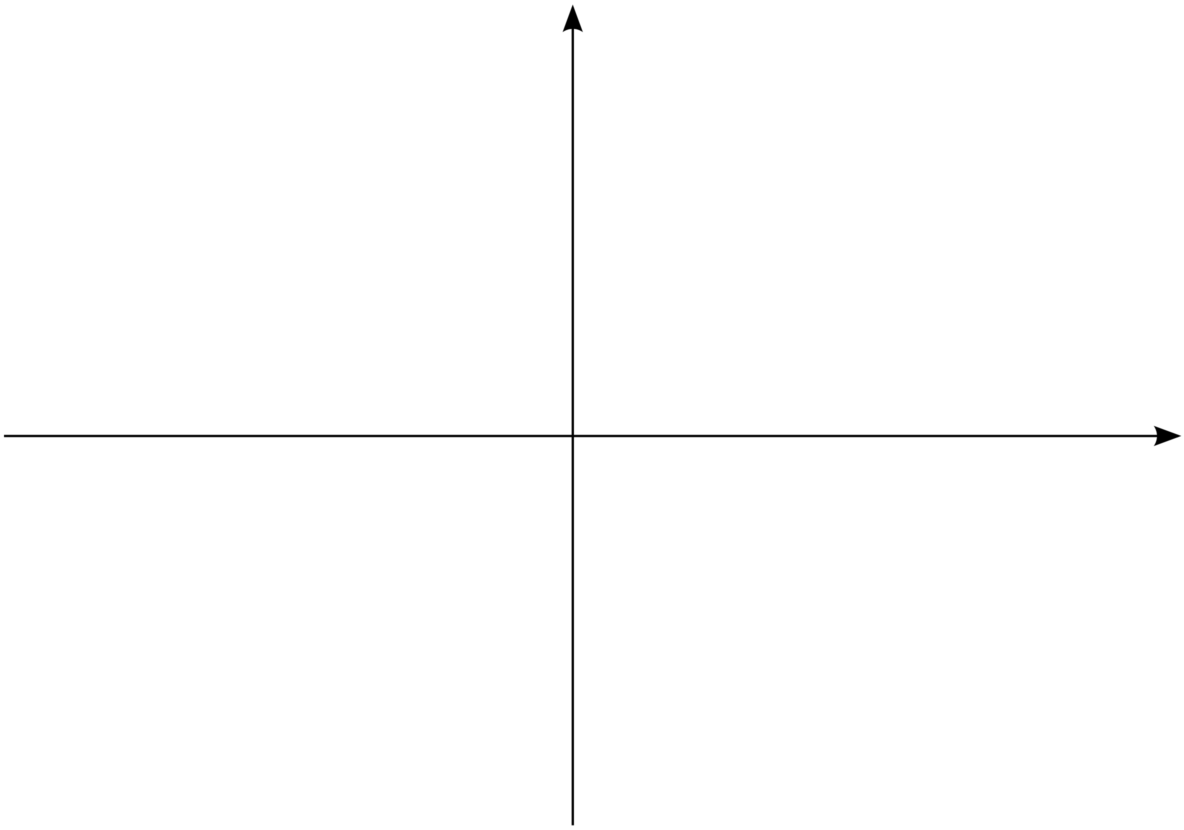
(b) per ognuno dei punti trovati sopra, si dica se si tratta di massimi, minimi o selle (3p.):

(c) (*) si trovi il minimo di f sull'insieme $B := \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ (4p.):

3. Siano
$$D := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq z, z^2 \leq x^2 + y^2\}, \qquad f(x, y, z) := \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$
Si calcoli l'integrale (improprio) $\iiint\limits_D f(x, y, z)\, dxdydz$ (8p.).

4. Dato il problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{\sqrt{1 - xy}} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(a) Si trovi il sottoinsieme del piano cartesiano Ω per cui vale il teorema di esistenza e unicità locali (cioè tale che, se $(x_0, y_0) \in \Omega$, esiste unica $y(x)$ soluzione del problema, definita per x vicino a x_0). Si trovino inoltre i sottoinsiemi Ω^+ e Ω^- dai quali $y(x)$ parte con derivata positiva e con derivata negativa. Si disegnino questi insiemi nello spazio sottostante (2p).



(b) Si dica se ci sono soluzioni costanti. (1p.)

(c) Consideriamo il caso $(x_0, y_0) = (0, -1)$. Si disegni la soluzione $y :]\underline{x}, \overline{x}[\to \mathbb{R}$ nel piano cartesiano riportato sopra, spiegando se i tempi di esistenza massimale $\underline{x}$ e $\overline{x}$ sono finiti o infiniti. (8p.)