COGNOME:												
NOME:												
MATR.:												

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Esempio di compitino di febbraio

1. Si consideri a funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Si dica se f è continua in $(0,0)$ (2p.):

Passando a coordinate polari

$$f(\rho,\theta) = \frac{\rho^3 \cos(\theta)\sin(\theta)(\cos(\theta)+\sin(\theta))}{\rho^2}$$

$$= \frac{\rho}{2}\sin(2\theta)(\cos\theta + \sin\theta) \Rightarrow f(\rho,\theta) \to 0 \text{ se } \rho \to 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$, f È CONTINUA

(b) Si dica se f è differenziabile in $(0,0)$ (2p.):

Notiamo che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ perché $f = 0$ sia sull'asse x che sull'asse y. Se f fosse differenziabile

$$f'(0,0)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)u + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)v = 0$$. Però

$$f'(0,0)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+hu, 0+hv) - f(0,0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{hu\,hv(hu+hv)}{h^2u^2+h^2v^2} = \frac{uv(u+v)}{u^2+v^2}$$

che non è zero per tutte le u,v.

DUNQUE f NON È DIFFERENZIABILE

2. Sia data la funzione di due variabili:

$$f(x, y) := 4xy - x^2 - y^4.$$

(a) Si trovino tutti i punti critici di f (1p.):

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4y - 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 4y^3$

$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} x = 2y \\ x = y^3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ 2y = y^3 \end{cases} \iff$

$(x,y) = (0,0)$ oppure $(x,y) = \pm(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$

PTI CRITICI

(b) per ognuno dei punti trovati sopra, si dica se si tratta di massimi, minimi o selle (3p.):

Calcolando lo Jacobiano si trova

$J(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{pmatrix}$ che nei pti critici diventa

$J(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \to$ determinante $= -16 < 0$

$\Rightarrow (0,0)$ PTO DI SELLA

$J(2\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -24 \end{pmatrix} \to$ determinante $= 48 - 16 > 0$

e traccia $< 0 \Rightarrow (2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ PTO DI MAX

Analogamente $-(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ è pto di max.

(c) (*) si trovi il minimo di f sull'insieme $B := \{(x,y) : x^2+y^2=1\}$ (4p.):

Cerchiamo i pti critici vincolati a ∂B, mediante i moltiplicatori di Lagrange:
$$\begin{cases} 4y-2x=\lambda x \\ 4x-4y^3=\lambda y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (\lambda+2)x=4y \\ y(\lambda+4y^2)=4x \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Moltiplico la I^a riga per x, la II^a per y e faccio la differenza $\Longrightarrow$

$$(*)\begin{cases} (\lambda+2)x=4y \\ y^2(\lambda+4y^2)=(\lambda+2)x^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Longrightarrow \quad y^2(\lambda+4y^2)=(\lambda+2)(1-y^2) \iff$$
$$4y^4+2(\lambda+1)y^2-(\lambda+2)=0$$

$$\Rightarrow y^2=\frac{-(\lambda+1)\pm\sqrt{\lambda^2+2\lambda+2+4\lambda+8}}{4}=\frac{-(\lambda+1)\pm(\lambda+3)}{4}=\begin{cases} 1/2 \\ \dfrac{-\lambda-2}{2} \end{cases}$$

SE $y^2=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$ (si può anche trovare λ ma non ci serve)

SE $y^2=-\frac{(\lambda+2)}{2}$ ($\Rightarrow \lambda\leq-2$) allora $x^2=1+\frac{(\lambda+2)}{2}=\frac{\lambda+4}{2}$

$\Rightarrow$ dalla prima riga di (*), $(\lambda+2)^2\frac{(\lambda+4)}{2}=-16\frac{(\lambda+2)}{2} \iff$
$(\lambda+2)(\lambda+4)=-16 \iff \lambda^2+6\lambda+24=0$ $\leftarrow$ NON HA SOLUZIONI

DUNQUE I PUNTI CRITICI DI f SU $\{x^2+y^2=1\}$ SONO
$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (tutte le quattro combinazioni).

A questi vanno aggiunti $(0,0)$ - che però è di sella per quanto visto prima, e $\pm(2\sqrt{2},\sqrt{2})$ che NON SONO in B e quindi non ci interessano. Calcolando f nei punti $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\rightarrow \pm 4\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\pm 2-\frac{3}{4} \Longrightarrow$$

$$\min_B f=-\frac{11}{4} \qquad \max_B f=-\frac{5}{4}$$

3. Siano

$$D := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1, 0 \le z, z^2 \le x^2+y^2\}, \qquad f(x,y,z) := \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

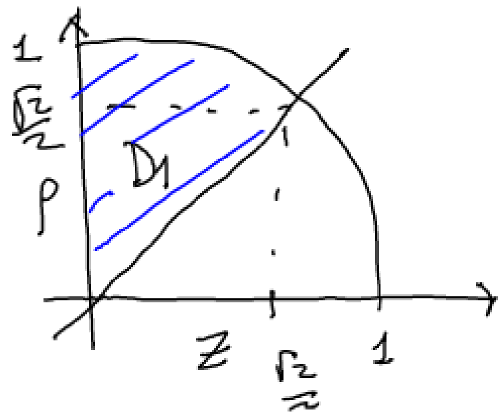
Si calcoli l'integrale (improprio) $\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$.

Passiamo in coordinate cilindriche $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$ $(z = z) \Rightarrow dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\theta\,dz$. D diventa

$\{(\rho,\theta,z) : \rho^2+z^2 \le 1, 0 \le z < \rho\} =$

$\{(\rho,\theta,z) : 0 \le \theta \le 2\pi, (z,\rho) \in D_1\}$ dove

$D_1 = \{0 \le z \le \frac{\sqrt{2}}{2}, z \le \rho \le \sqrt{1-z^2}\}$



$\Rightarrow$ INTEGRALE $=$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_{D_1} \frac{z}{\rho}\rho\, d\rho\, dz\right)d\theta =$$

$$2\pi \int_0^{\sqrt{2}/2} z\left(\int_z^{\sqrt{1-z^2}} d\rho\right)d\theta = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}/2} z\left(\sqrt{1-z^2}-z\right)dz$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}/2} z\sqrt{1-z^2}\,dz - 2\pi\int_0^{\sqrt{2}/2} z^2\,dz = \left(\begin{array}{l}1-z^2 = s \text{ nel} \\ \text{I° integrale}\end{array}\right)$$

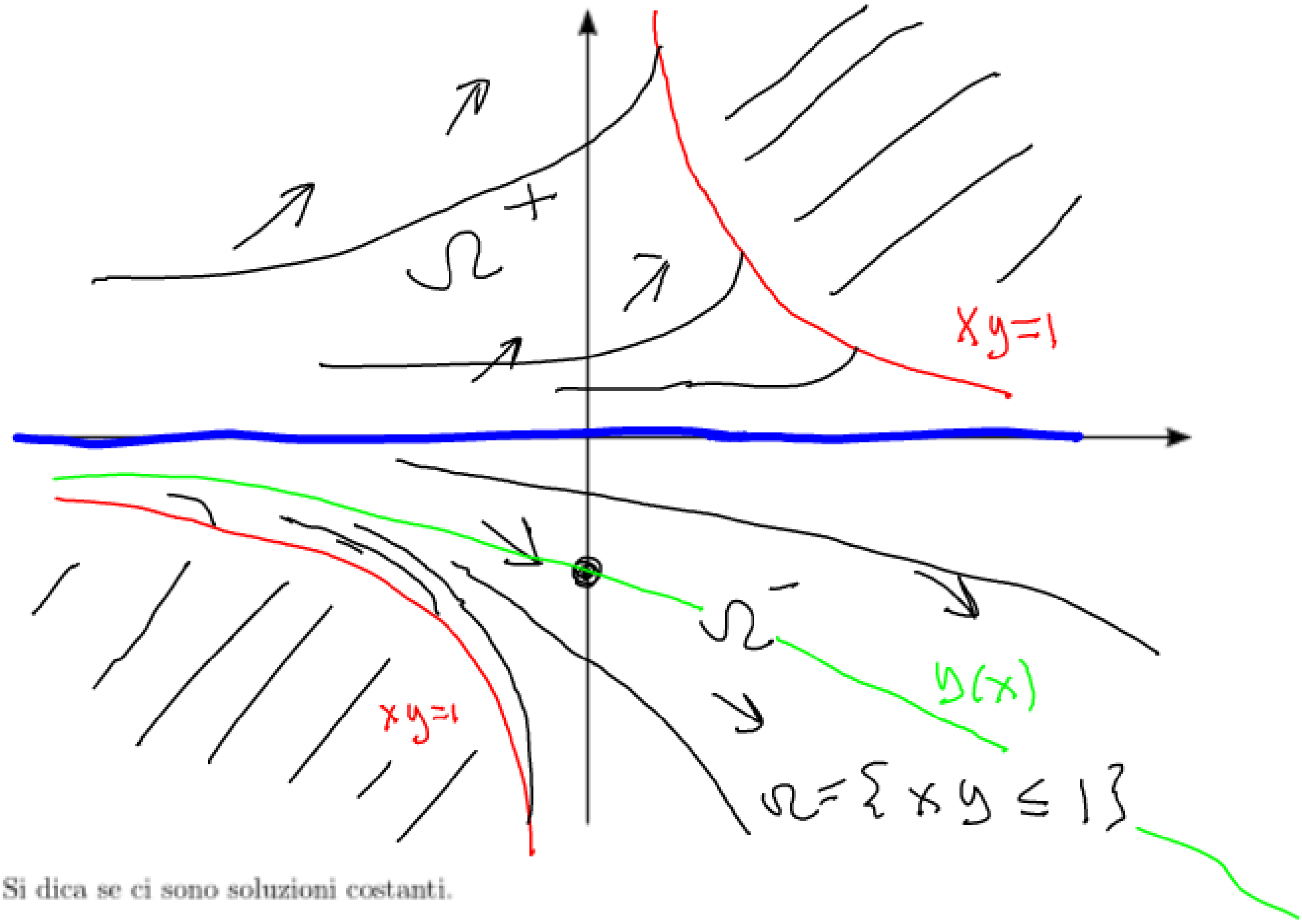
$$= \pi\int_1^{1/2}\left(-\sqrt{s}\right)ds - \frac{2\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \pi\left[\frac{2}{3}\sqrt{s}^3\right]_{1/2}^1 - \frac{\pi\sqrt{2}}{6} =$$

$$\pi\left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{6}\right) = \boxed{\frac{\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

4. Dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{\sqrt{1-xy}} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(a) Si trovi il sottoinsieme del piano cartesiano Ω per cui vale il teorema di esistenza e unicità locali (cioè tale che, se $(x_0, y_0) \in \Omega$, esiste unica $y(x)$ soluzione del problema, definita per x vicino a x_0). Si trovino inoltre i sottoinsiemi Ω^+ e Ω^- dai quali $y(x)$ parte con derivata positiva e con derivata negativa. Si disegnino questi insiemi nello spazio sottostante.

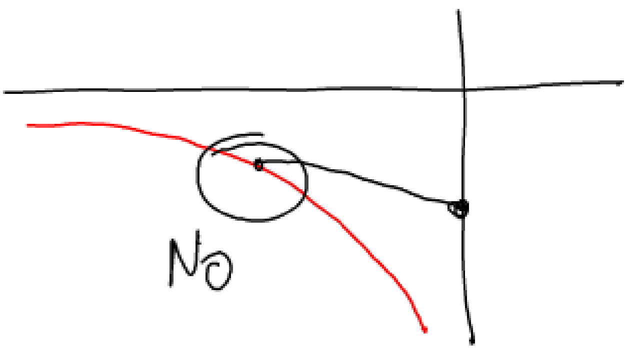


(b) Si dica se ci sono soluzioni costanti.

c'è la sol. costante $y = 0$

(c) Consideriamo il caso $(x_0, y_0) = (0, -1)$. Si disegni la soluzione $y :]\underline{x}, \overline{x}[\to \mathbb{R}$ nel piano cartesiano riportato sopra, spiegando se i tempi di esistenza massimale $\underline{x}$ e $\overline{x}$ sono finiti o infiniti.

$y(x)$ decresce sempre e rimane sempre < 0 (per l'unicità). Se $\underline{x} \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$(x, y(x)) \to (\underline{x}, \underline{y})$ con $\underline{x} \cdot \underline{y} = 1$



Ma allora in $\underline{x}$
$y'(\underline{x}) = -\infty$ e questo non è possibile

DUNQUE $\underline{x} = -\infty$ e $\frac{1}{x} < y(x) < 0$ $\forall x < 0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$

DICO che $\overline{x} = +\infty$. SE INVECE $0 < \overline{x} < +\infty$ necessariamente
$\lim_{x\to\overline{x}^-} y(x) = -\infty$. Però $\lim_{\substack{x\to\overline{x}\\ y\to-\infty}} \frac{1}{y}\frac{y}{\sqrt{1-xy}} = 0$

e questo implicherebbe una stima esponenziale su $y(x)$
$(|y(x)| \leq C e^{kx})$ che è incompatibile con la divergenza.

VOLENDO (NON ERA RICHIESTO) SI PUÒ MOSTRARE CHE
$\lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$

INFATTI, se $y \leq -1$ e $x \geq 0$ $\frac{1}{\sqrt{1-xy}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \Rightarrow$

$\frac{y}{\sqrt{1-xy}} \leq \frac{y}{\sqrt{1+x}}$. Se prendiamo z tale che $z' = \frac{z}{\sqrt{1+x}}$
e $z(0) = -1$ abbiamo $z(x) = z(0)e^{2\sqrt{1+x}} = -e^{2\sqrt{1+x}}$

Per costruzione $y(x) \leq z(x)$ e $z(x) \to -\infty$ per $x \to +\infty$.