COGNOME E NOME:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 15 settembre 2014. Primo foglio.

1. Sia $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x,y) := \dfrac{xy^2}{4x^2+9y^2}$ per $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0)=0$.

(a) Si dica se f è continua in $(0,0)$ (2p.).

Ponendo $x = \frac{\rho}{2}\cos(\theta)$, $y = \frac{\rho}{3}\cos\theta \Rightarrow$

$$f(x,y) = \frac{1}{18}\,\frac{\rho^3 |\cos\theta||\sin(\theta)|^2}{\rho^2} = \rho\,\frac{|\cos\theta||\sin(\theta)|^2}{18}$$

DUNQUE $|f(x,y)| \leq \frac{\rho}{18}$ che tende a zero se $\rho \to 0$

NE SEGUE CHE f è continua in $(0,0)$.

(b) Si dica se f è differenziabile in $(0,0)$ (2p.).

Poiché $f(x,0)=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = 0$ / $f(0,y)=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(0,0)=0$

Se f fosse differenziabile ne seguirebbe che $f'(0,0)(v)=0$ per ogni direzione v. Prendiamo $v=(1,1) \Rightarrow$

$$f'(0,0)(1,1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h(4h^2+9h^2)} = \frac{1}{13} \neq 0$$

DUNQUE f NON È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$

2. Si calcoli l'area della superficie S definita da $S := \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1, z = x^2-y^2\}$ (3p.).

S è una superficie cartesiana con la parametrizzazione

$r(u,v) = (u, v, u^2-v^2)$, $(u,v) \in B = \{u^2+v^2 \leq 1\}$. $\Rightarrow$

$r_u \otimes r_v = (-2u, 2v, 1)$ da cui

$$\text{Area}(S) = \iint_B \|r_u \otimes r_v\|\,du\,dv = \iint_B \sqrt{1+4u^2+4v^2}\,du\,dv =$$

(coordinate polari) $= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho =$

$(1+4\rho^2 = s,\ 8\rho\,d\rho = ds) = \frac{1}{8}\cdot 2\pi \int_1^5 \sqrt{s}\,ds = \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}\sqrt{s^3}\right]_1^5 =$

$$\boxed{\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)}$$

3. Data la funzione $f(x,y) := 3\ln(1+x^2+y^2) + 2xy$

(a) si trovino tutti i suoi punti stazionari (2p.);

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{6x}{1+x^2+y^2} + 2y \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{6y}{1+x^2+y^2} + 2x .$$

Allora (x,y) stazionario $\iff \begin{cases} 3x + (1+x^2+y^2)y = 0 \\ 3y + (1+x^2+y^2)x = 0 \end{cases}$ (SIST.)

Moltiplico la I° rigo per y / la II° per x e faccio la differenza $\Rightarrow$ $(1+x^2+y^2)y^2 = (1+x^2+y^2)x^2$. Dato che $1+x^2+y^2 \neq 0$ questo equivale a $x^2 = y^2 \iff x = \pm y$. Se metto $x = y$ in (SIST.) $\Rightarrow$ $3x + (1+2x^2)x = 0 \iff (4+2x^2)x = 0 \iff x = 0$ ($\boxed{(x,y) = (0,0)}$). Se $x = -y$ $3x - (1+2x^2)x = 0 \iff x = 0$ (GIA' VISTA) OPPURE $2 - 2x^2 = 0 \iff x = \pm 1$. Questo mi dà $\boxed{(x,y) = \pm(1,-1)}$. IN TUTTO TRE PTI STAZ.

(b) ~~si classifichi la natura dei punti precedentemente trovati~~ (2p.); SI CALCOLINO GLI HESSIANI

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = \frac{6(1+x^2+y^2) - 6x \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{6 - 6x^2 + 6y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = \frac{6 + 6x^2 - 6y^2}{(1+x^2+y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-12xy}{(1+x^2+y^2)^2} + 2$$

DUNQUE, CALCOLANDO LE MATRICI HESSIANE:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$ che ha determinante $36 - 4 > 0$ e traccia > 0

$\Rightarrow$ $(0,0)$ PTO DI MINIMO

$$H_f(\pm(1,-1)) = \begin{pmatrix} \frac{6}{9} & \frac{12+18}{9} \\ \frac{12+18}{9} & \frac{6}{9} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha determinante $< 0 \Rightarrow \pm(1,-1)$ SELLE

(c) sii trovi inoltre il massimo di f su $B := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ (2p.).

MOLTIPLICATORI $\Rightarrow$ OLTRE AI PTI STAZ. LIBERI CONSIDERO:

$$\begin{cases} \dfrac{6x}{1+x^2+y^2} + 2y = \lambda x \\ \dfrac{6y}{1+x^2+y^2} + 2x = \lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \frac{\lambda}{2} x \\ y+x = \frac{\lambda}{2} y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \left(\frac{\lambda}{2}-1\right) x \\ x = \left(\frac{\lambda}{2}-1\right) y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = \left(\frac{\lambda}{2}-1\right)^2 x$ da cui $x=0$ ($\Rightarrow y=0$ IMPOSSIBILE) oppure $\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)^2 = 1$

DUNQUE DEVE ESSERE $\frac{\lambda}{2} - 1 = \pm 1$. METTENDO QUESTA CONDIZ. NEL SISTEMA $\Rightarrow$

$\begin{cases} y = x \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ OPPURE $\begin{cases} y = -x \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ CHE DÀ QUATTRO PUNTI $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

CALCOLANDO f SU TALI PTI $\Rightarrow f\left(\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 3\ln(2)+2$; $f\left(\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 3\ln(2)-2$

INOLTRE $f(0,0) = 0$ (e gli altri due pti critici $\notin \{x^2+y^2 \leq 1\}$) $\Rightarrow \boxed{\max_{x^2+y^2\leq 1} f(x,y) = 3\ln(2)+2}$

4. Si consideri la serie di potenze $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 2^n} x^n$.

(a) Si trovi il raggio di convergenza R della serie (1p.)

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{1}{n} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n 2^n}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 2}$$

(b) Si trovi l'insieme I dei punti in $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie converge, cioè l'insieme delle x per cui $f(x)$ è definita. (1p.)

Sicuramente I contiene $]-2,2[$ ed è contenuto in $[-2,2]$ (per la teoria). Bisogno vedere la convergenza della serie nei punti 2 e -2. Se $x=-2$ trovo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-2)^n}{n\, 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che DIVERGE. Se $x=2$ trovo (calcolo analogo) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ CHE CONVERGE PER LEIBNIZ.

$$\Rightarrow \boxed{I = \,]-2,2]}$$

TERRÒ CONTO DI QUESTO ERRORE NELLA

(c) Si faccia vedere che per le x tra $-R$ ed R si ha $f'(x) = -\frac{\cancel{x}\ 1}{2+x}$ (2p.)

Per i teoremi di derivazione per serie $\Rightarrow$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cancel{n}\, x^{n-1}}{\cancel{n}\, 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{2^n} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^{n-1}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^{n} =$$ (somma della serie geometrica)

$$-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x/2} = -\frac{1}{2+x}$$

(d) Si trovi la somma $f(x)$ per le x tra $-R$ ed R. (2p.)

Da (b) $\Rightarrow$ $f' = -\frac{1}{2+x}$ $\Rightarrow$ $f(x) = \int -\frac{1}{2+x}\,dx = -\ln(2+x) + c$

con $c \in \mathbb{R}$. D'altra parte $f(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 0^n}{n\, 2^n} = 0$

e quindi $0 = -\ln(2) + c \Leftrightarrow c = \ln(2)$. In definitiva

$$f(x) = \ln\left(\frac{2}{2+x}\right) \quad \text{per } -2 < x < 2$$

5. Si risponda ai seguenti quesiti barrando una delle caselle (1 punto ciascuno).

(a) f è una funzione definita su un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$ a valori in $\mathbb{R}$. Se esistono le derivate parziali di f in tutti i punti di Ω, allora f è continua in Ω $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\cancel{\text{FALSO}}}$.

(b) Se per ogni (x, y, z) si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \neq 0$, allora $\{(x, y, z) : f(x, y, z) = 2\}$ è una superficie regolare in $\mathbb{R}^2$. $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(c) Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ per $-1 < x < 1$ e se tutte le derivate di f nel punto $x = 0$ sono nulle, allora $a_n = 0$ per ogni n. $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(d) Sia $\vec{f}(x, y)$ un campo vettoriale definito su $\Omega := \{(x, y) : x > 0\}$. Allora $\text{rot}(\vec{f}) = 0$ se e solo se esiste $F : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\vec{f} = \nabla F$. $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

COGNOME E NOME:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 15 settembre 2014. Secondo foglio.

6. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y}{x-y}, \qquad y(x_0) = y_0.$$

(a) Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Si trovino inoltre le soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione cresce o decresce, riportando queste informazioni nel diagramma sottostante (2p.).

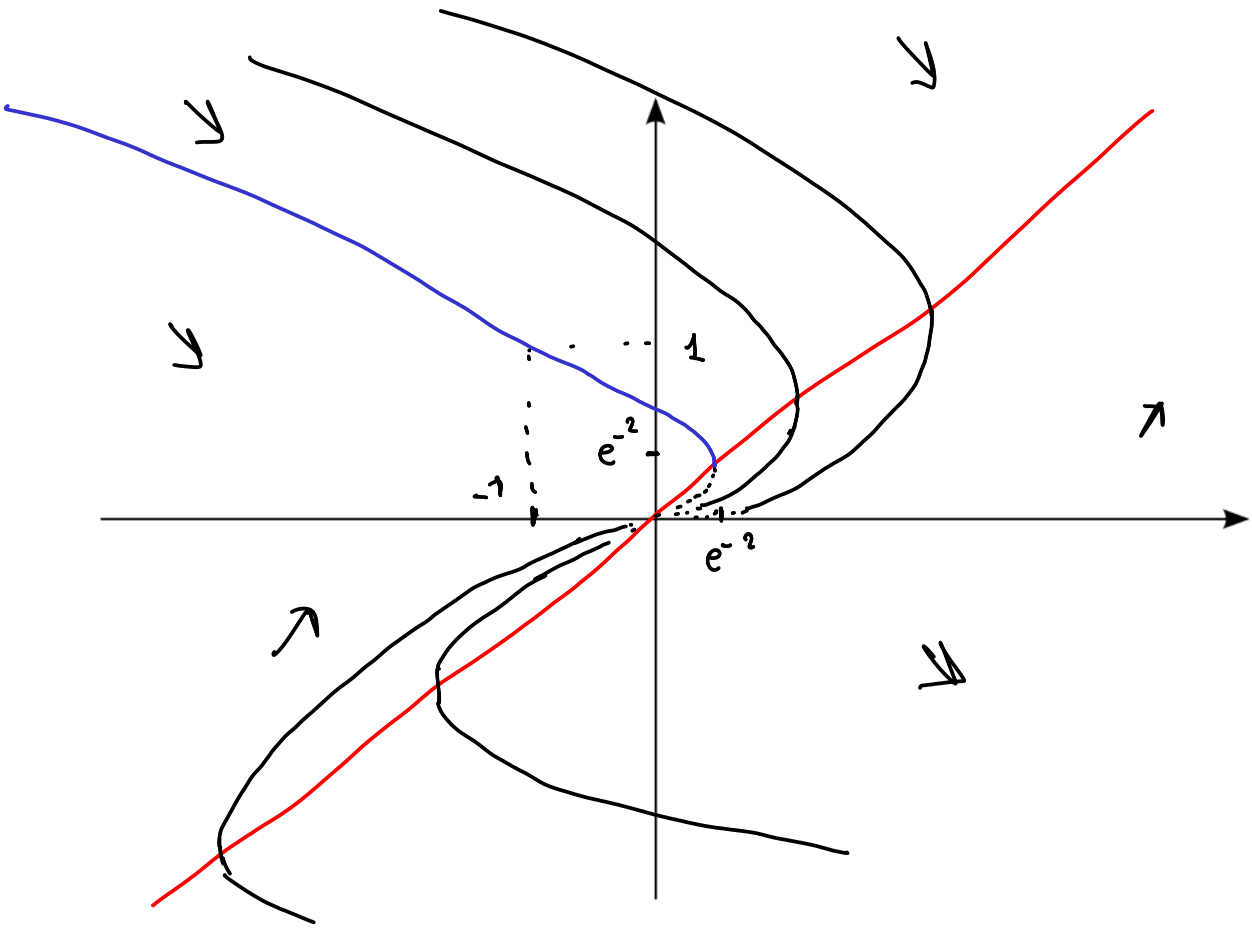
Il teorema di Cauchy vale in $\{(x,y) : x \neq y\}$

c'è la sol. costante $y = 0$.

La zona di crescenza è $\frac{y}{x-y} > 0 \iff \{y>0, x>y\} \cup \{y<0, x<y\}$

mentre la zona di decrescenza è il complementare

(a parte $y=0$)



(b) Si trovi un fattore integrante per l'equazione, avente la forma $\lambda(x, y) = \lambda(y)$ (2p.).

Deve essere $\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(y)(-y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(y)(x-y)\right) \iff -\lambda'(y)\,y - \lambda(y) = \lambda(y)$

$\iff \lambda'(y) = -\frac{2\lambda(y)}{y}$ che ha soluzioni $\lambda(y) = \frac{c}{y^2}$

DUNQUE UN FATTORE INTEGRANTE È $\boxed{\lambda(y) = \frac{1}{y^2}}$

Indico con F un potenziale per il campo $\frac{1}{y^2}\begin{pmatrix}-y\\ x-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{y}\\ \frac{x-y}{y^2}\end{pmatrix}$

(c) Si trovi un integrale primo per l'equazione (2p.).

Deve essere $F_x = -\frac{1}{y} \Rightarrow F(x,y) = -\frac{x}{y} + c(y)$ da cui $F_y = \frac{x}{y^2} + c'(y)$. Se impongo $F_y = \frac{x-y}{y^2}$ trovo $c' = -\frac{1}{y} \Rightarrow c(y) = -\ln|y|$. DUNQUE

$$\boxed{F(x,y) = -\frac{x}{y} - \ln|y|}$$

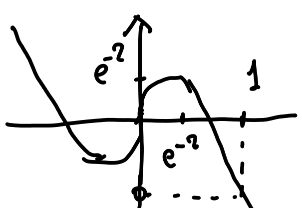
Per la teoria sappiamo che $F(x, y(x))$ è costante quando $y(x)$ è una soluzione.

(d) Si trovi una formula (eventualmente implicita) per la soluzione che parte da $(-1, 1)$ (individuandone anche l'intervalli di esistenza massimale) e se ne disegni il grafico nel diagramma sopra (2p.).

Dato che $F(x, y(x)) = c$, mettendo $x = -1 \Rightarrow c = F(-1, 1) = 1$. Dunque la sol. $y(x)$ (che passa per $(-1,1)$) verifica $-\frac{x}{y(x)} - \ln|y(x)| = 1 \Rightarrow$

$$x = -\left(1 + \ln|y(x)|\right) y(x)$$

Facendo il grafico di $\varphi(y) = -y(1 + \ln|y|) \Rightarrow$
$\varphi'(y) = -2 - \ln|y|$. $\varphi'(y) \geq 0$ per $|y| = e^{-2}$
φ DISPARI

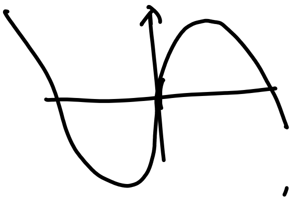


$\Rightarrow$ si ottiene il grafico di $y(x)$, "invertendo" quello di φ

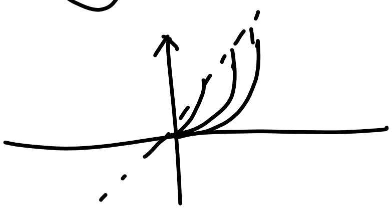
L'intervallo di esistenza è $]-\infty, e^{-2}[$

(e) Si dica se se è possibile trovare "soluzioni" $y(x)$ che partono da $(0,0)$ e quante sono (2p.) – qui vogliamo che $y(x)$ sia una funzione derivabile, definita in un intorno di 0 tale che $y(0)=0$ e tale che $y(x)$ verifichi l'equazione per le $x \neq 0$.

Se si studiano le funzioni date da $-\frac{x}{y} - \ln|y| = c \iff x = (c+\ln|y|)\,y$ si vede che tutte hanno derivata ∞ in $x=0$



(come nel punto d). Ne segue che tutte le $y(x)$ hanno derivata che tende a zero per $x \to 0$



$\Rightarrow$ $\boxed{\text{DA } (0,0) \text{ PARTONO INFINITE SOLUZIONI}}$

7. Siano:

$$\vec{f}(x,y,z) := x^2 z \sin(yz)\mathbf{i} + 2x\cos(yz)\mathbf{j} + z^2|xy|e^{x^2+y^2}\mathbf{k},\ \ C := \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

(a) Si calcoli il flusso (uscente) di $\vec{f}$ su ∂C (3p.).

Si HA $\operatorname{div}\vec{f} = 2xz\cancel{\sin}(yz) + 2xz(-\cancel{\sin}(yz)) + 2z|xy|e^{x^2+y^2}$

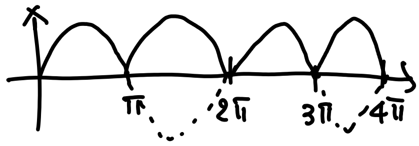
DUNQUE

$$\Phi(\vec{f}, \partial C) = \iiint_C \operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz = \iiint_C 2z|xy|e^{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$$

$$= (\text{coordinate cilindriche}) = \int_0^1 2z\,dz \int_0^{2\pi}\int_0^1 |\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta|\,\rho\, e^{\rho^2}\,d\rho\,d\theta$$

$$= [z^2]_0^1 \int_0^{2\pi} |\cos\theta \sin\theta|\,d\theta \int_0^1 \rho^3 e^{\rho^2}\,d\rho = (\star).$$ Si ha:

$$\int_0^{2\pi} |\cos\theta\sin\theta| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|\sin(2\theta)|\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{4\pi}|\sin t|\,dt$$



$$= \int_0^{\pi} \sin(t)\,dt = [-\cos(t)]_0^{\pi} = 2$$

$$\int_0^1 \rho^3 e^{\rho^2}\,d\rho = (\rho^2 = s \quad 2\rho\,d\rho = ds) = \frac{1}{2}\int_0^1 s e^s\,ds =$$

$$\left[\frac{1}{2} s e^s\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^s = \frac{1}{2}e - \left[\frac{e^s}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\star) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

(b) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ su $B_1 := \{(x, y, 1) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ (normale rivolta verso l'alto) (1p).

Per la def. di flusso

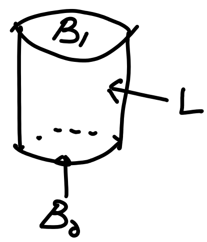
$$\Phi(\vec{f}, B_1) = \iint_B \vec{f}(x,y,1) \cdot \vec{k} \, dx\,dy = \iint_B |xy| e^{x^2+y^2} dx\,dy$$

dove $B = \{x^2+y^2 \leq 1\}$. Facendo gli stessi calcoli del punto (a) (senza il pezzo con z), si trova:

$$\iint_B |xy| e^{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} |\cos\theta \sin\theta| \, d\theta \int_0^1 \rho^3 e^{\rho^2} d\rho = 1$$

(c) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ su $L := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ (normale rivolta verso l'esterno) (2p).

Se calcolo il flusso di $\vec{f}$ su B_0 (vedi $\rightarrow$)



$$\Phi(\vec{f}, B_0) = \iint_B f(x,y,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{perché } z=0)$$

DUNQUE $\underbrace{\Phi(\partial C)}_{=1} = \underbrace{\Phi(B_1)}_{=1} + \underbrace{\Phi(B_0)}_{=0} + \Phi(L)$

DA CUI $\boxed{\Phi(\vec{f}, L) = 0}$

(d) Si dica se esiste $\vec{F}$ tale che $\mathrm{rot}(\vec{F}) = \vec{f}$ e in caso affermativo si trovi un tale $\vec{F}$ (1p.).

NON PUÒ ESISTERE UN TALE $\vec{F}$;

se esistesse avrei $\mathrm{div}(\vec{f}) = \mathrm{div}(\mathrm{rot}(\vec{F})) = 0$

mentre dai calcoli sopra $\mathrm{div}(\vec{f}) \neq 0$