COGNOME E NOME:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 21 luglio 2014. Primo foglio.

1. Sia $M := \{(x,y) : 4x^2 - 4x^4 - y^2 = 0\}$. Si dica per quali (x_0, y_0) in M l'insieme M è una curva regolare nell'intorno di (x_0, y_0) (3p.).

Poniamo $G(x,y) := 4x^2 - 4x^4 - y^2$ $(\Rightarrow M = \{(x,y) : G(x,y) = 0\})$

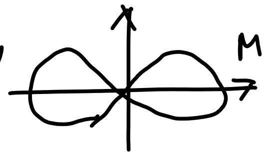
Allora $\frac{\partial}{\partial x} G(x,y) = 8x - 16x^3$ e $\frac{\partial}{\partial y} G(x,y) = -2y$.

Dunque $\nabla G = 0 \iff y = 0$ e $(x = 0$ oppure $x = \pm\sqrt{2})$

Però $(\pm\sqrt{2}, 0) \notin M$ (perché $G(\pm\sqrt{2}, 0) = 8 - 16 = -8 \neq 0$)

e quindi per ogni $(x,y) \in M$ eccetto $(0,0)$ si ha $\nabla G(x,y) \neq 0$.

Per il teorema del Dini M è una curva regolare vicino a tali punti. Invece, dato che $(x,y) \in M \iff y = \pm 2x\sqrt{1-x^2}$, si vede che vicino a $(0,0)$ M "si autointerseca"



2. Sia $\vec{f} := (x^3 y + \cos(z^2))\mathbf{i} + (yz - e^{-x^2 z^2})\mathbf{j} + \arctan(xy)\mathbf{k}$. Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ uscente dalla superficie del cubo $Q := \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$ (3p.).

Si ha $\operatorname{div} \vec{f} = 3x^2 y + z$ e quindi

$$\iint_{\partial Q} \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \iiint_Q (3x^2 y + z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (3x^2 y + z)\, dz \right) dy \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left[3x^2 y z + \frac{z^2}{2} \right]_0^1 dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(3x^2 y + \frac{1}{2}\right) dy \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left[\frac{3x^2 y^2}{2} + \frac{y}{2} \right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{2} + \frac{x}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

3. Data la funzione $f(x,y) := \dfrac{1}{x^2+y^2} + 2xy$, si trovino tutti i suoi punti stazionari (3p.) e se ne classifichi la natura (2p.)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} + 2y \ ; \ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} + 2x$$

Dunque $\nabla f(x,y) = 0 \iff (*) \begin{cases} y = \dfrac{x}{(x^2+y^2)^2} \\ x = \dfrac{y}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{matrix}\text{metto la II}^a \\ \text{nella I}^a\end{matrix}\right)$

$y = \dfrac{y}{(x^2+y^2)^4} \iff y = 0$ oppure $x^2+y^2 = 1$. Ma se $y=0$

da $(*)$ segue $x=0$ che è impossibile dato che $(0,0) \notin$ Dominio

Se $x^2+y^2=1$ da $(*) \Rightarrow x = y$ dunque i pti sono $\boxed{\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

Inoltre $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = \dfrac{6x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^3}$; $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \dfrac{6y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^3}$

$\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \dfrac{8xy}{(x^2+y^2)^3} + 2$. Dunque calcolando l'Hessiano:

$H_f\left(\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ che ha determinante $4-36<0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{i punti sono di sella}}$

4. Si risponda ai seguenti quesiti barrando una delle caselle (1 punto ciascuno).

(a) Se f è differenziabile in un punto, allora ha le derivate direzionali in quel punto ~~VERO~~ FALSO.

(b) La funzione $f(t)$ definita mediante la serie di Fourier $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\sin(nt)$ è infinitamente derivabile ~~VERO~~ FALSO.

(c) La serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge uniformemente su $]-1,1[$ VERO ~~FALSO~~.

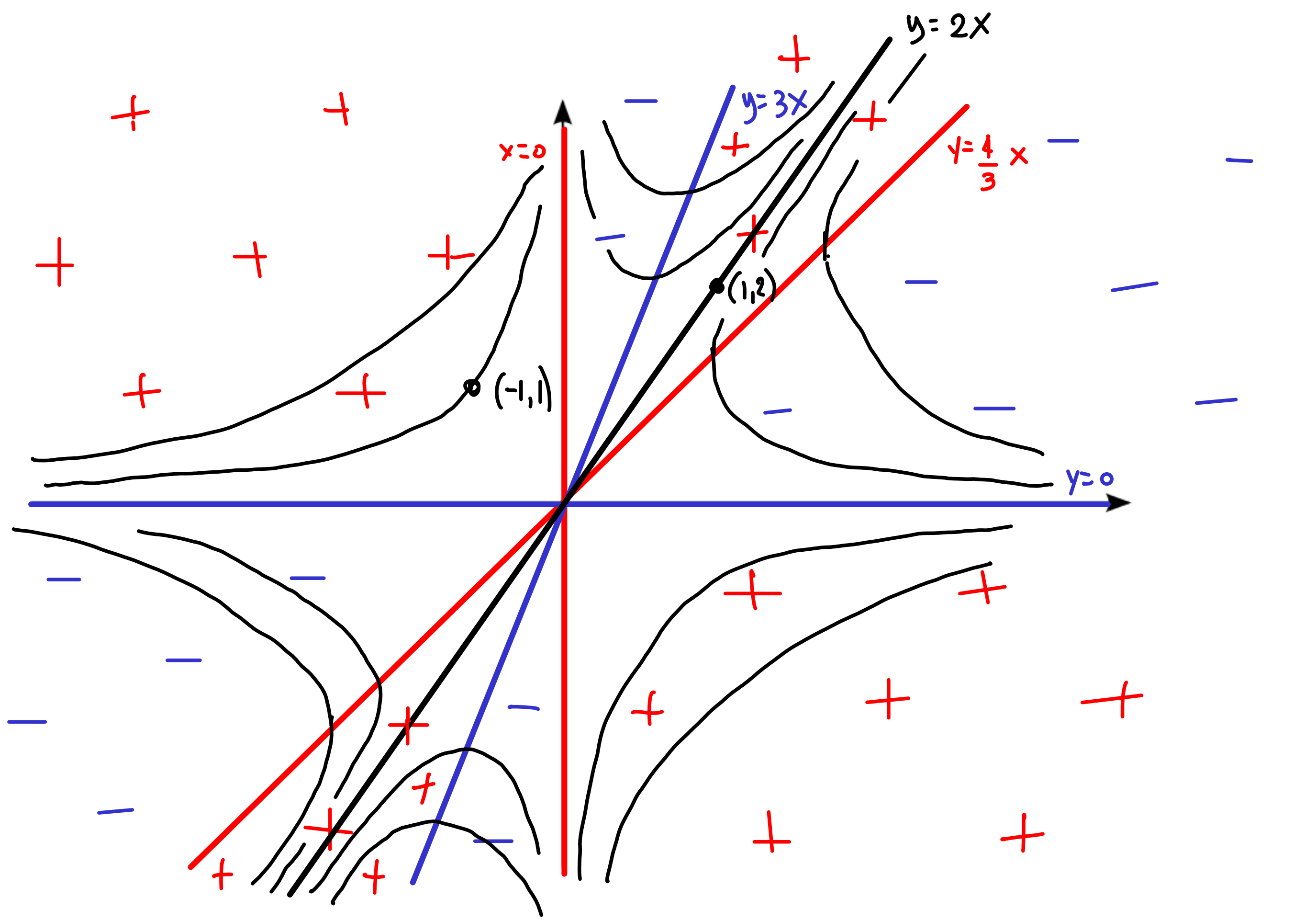
(d) Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ è una curva e $\tilde{\gamma}$ indica la curva percorsa in verso opposto, allora per ogni funzione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continua si ha $\int_{\tilde{\gamma}} f\, ds = \int_{\gamma} f\, ds$ ~~VERO~~ FALSO.

5. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{6xy - 2y^2}{3xy - 4x^2}, \qquad y(x_0) = y_0.$$

(a) Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy (1p.). Si trovino le soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (2p.).

Poniamo $F(x,y) := \frac{6xy-2y^2}{3xy-4x^2} = \frac{2y(3x-y)}{x(3y-4x)}$. Tenendo conto dei segni dei quattro fattori si vede che il teor. di ex vale dove $x \neq 0$ e $y \neq \frac{4}{3}x$. Inoltre $y=0$ è (l'unica) sol. costante e i segni di F (= zone di crescenza/decrescenza) sono come indicati di sotto



(b) Si trovi un fattore integrante per l'equazione, avente la forma $\lambda(x, y) = \lambda(xy)$ (2p.).

Deve essere $\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(xy)\,(2y^2-6xy)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(xy)(3xy-4x^2)\right) \Longleftrightarrow$

$\lambda'(xy)\,x\,(2y^2-6xy) + \lambda(xy)(4y-6x) = \lambda'(xy)\,y\,(3xy-4x^2) + \lambda(xy)(3y-8x)$

$\Leftrightarrow \lambda'(xy)[2xy^2-6x^2y-3xy^2+4x^2y] = \lambda(xy)[-4y+6x+3y-8x] \Leftrightarrow$

$\lambda'(xy)[-xy^2-2x^2y] = \lambda(xy)[-y-2x] \Leftrightarrow$

$\lambda'(xy)\, xy\,[y+2x] = \lambda(xy)(y+2x) \Leftarrow \lambda'(xy) = \dfrac{\lambda(xy)}{xy}$

che ha come sol. $\lambda(xy) = c\,xy$. Un possibile fattore integrante è allora $\boxed{\lambda(x,y) = xy}$

(c) Si trovi un integrale primo per l'equazione (2p.).

Devo trovare $F(x,y)$ t.c. $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2xy^3-6x^2y^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2-4x^3y$

Dalla prima: $F(x,y) = x^2y^3-2x^3y^2+c(y)$. Derivando in y:

$\dfrac{\partial}{\partial y}F(x,y) = 3x^2y^2-4x^3y+c'(y)$, che confrontata con la II° condizione mi dà $c'(y)=0 \Rightarrow c(y)$ costante. Dunque un int. primo è dato da $\boxed{F(x,y) = x^2y^3-2x^3y^2 = x^2y^2(y-2x)}$

(ho messo $c=1$).

Dunque se $y(x)$ risolve l'eq. $\Rightarrow F(x,y(x))$ è costante.

(d) Si trovi un'espressione per la soluzione che parte da $(1,2)$ e se ne tracci il grafico (1p.).

Si ha $F(1,2)=0 \Rightarrow$ la sol. $y(x)$ che parte da $(1,2)$ verifica

$x^2y^2(y-2x)=0 \quad \forall x \Rightarrow \boxed{y=2x}$

(e) Si tracci il grafico della soluzione che parte da $(-1,1)$ (2p.).

Dall'analisi dei segni di F si vede che $y(x)$ è crescente e per quanto sopra $y(x)$ verifica $F(x,y(x)) = x^2y(x)^2(y(x)-2x) = F(-1,1) = -1$.

Allora $\underline{x} = -\infty$ e $\underline{y} := \lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$ (perché non $y(x)$ non può toccare l'asse x).

Inoltre $\bar{x}=0$ perché se $\bar{x}<0 \Rightarrow \bar{y} := \lim_{x\to\bar{x}} y(x) = +\infty$ MA ALLORA $F(x,y(x)) \to -\infty$ (IMPOSSIBILE). Dunque $\bar{x}=0$ e $\bar{y}=+\infty$ perché se fosse $\bar{y}<+\infty$ $\Rightarrow F(x,y(x)) \to 0$ (IMPOSSIBILE).

COGNOME E NOME: | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

7. Si consideri l'equazione differenziale:

$$x^2y'' - y' - 2y = 1$$

(a) si dica se (0,5p. per domanda) l'equazione è:

lineare	~~VERO~~	FALSO;
omogenea	VERO	~~FALSO~~;
vale il teorema di Cauchy per le equazioni del secondo ordine	VERO	~~FALSO~~.

(b) Si cerchi la soluzione y come una serie di potenze centrata in zero cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Per questo si trovi una relazione ricorsiva tra i coefficienti a_n (3 p.).

Se $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

$$\Rightarrow x^2y'' - y' - 2y = \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n}_{\text{qui posso mettere anche } n=0\,/\,n=1 \text{ perché i rispettivi addendi sono } =0} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}}_{\text{trasla } n-1\to n \text{ e quindi } n \to n+1 \text{ e la serie parte da zero}} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - (n+1) a_{n+1} x^n - 2a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n^2-n-2)a_n - (n+1)a_{n+1}\right] x^n$$

Questa serie deve fare 1. Per questo il termine noto deve essere 1 e gli altri 0.

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{n^2-n-2}{n+1} a_n & \text{per } n \geq 1 \\ a_1 = -2a_0 - 1 \end{cases} \Longleftrightarrow (R) \begin{cases} a_{n+1} = (n-2)a_n \\ a_1 = -2a_0 - 1 \end{cases}$$

dato che $n^2 - n - 2$ HA RADICI 2 e -1 $\Rightarrow n^2 - n - 2 = (n-2)(n+1)$

(c) Si dica quante soluzioni verificano la condizione $y(0) = 0$ e se ne scriva esplicitamente una (1p).

Deve essere $a_0 = y(0) = 0$. Usando $(R) \Rightarrow a_1 = -1$ e
$a_2 = a_{1+1} = (1-2)a_1 = (-1)(-1) = 1$. Da 3 in poi $a_n = 0$ (vedi la (d))

$\Rightarrow \boxed{y(x) = x^2 - x}$ (e non ce ne sono altre - sempre a causa di (R))

(d) Si faccia vedere che tutte le soluzioni scrivibili come serie di potenze in zero sono dei polinomi (1p.).

Da (R) si vede che $a_3 = a_{2+1} = (2-2)a_2 = 0$ qualunque sia a_2.
Ne segue $a_4 = a_{3+1} = (3-2)a_3 = a_3 = 0$ e, ricorsivamente, $\boxed{a_n = 0 \ \forall n \geq 3}$
Dunque $y(x)$ è un polinomio di grado 2

8. Siano:

$$\vec{F}(x,y,z) := (2x\sin(z^2) - x^2y^3)\mathbf{i} - y\sin(z^2)\mathbf{j} + \cos(z^2)\mathbf{k}, \quad S := \left\{(x,y,z) : 0 \le 4x^2 + y^2 \le 1, z = 2x^2 - y^2\right\}.$$

(a) Si calcoli $\mathrm{rot}(F)$ (1p.)

$$\vec{f} := \mathrm{rot}\,\vec{F} = (F_{3y} - F_{2z})\,i + (F_{1z} - F_{3x})\,j + (F_{2x} - F_{1y})\,k =$$

$$\boxed{2yz\cos(z^2)\,\mathbf{i} + 4xz\cos(z^2)\,\mathbf{j} + 3x^2y^2\,\mathbf{k}}$$

(b) Si trovi una parametrizzazione per S (1p.) e si calcoli l'area della superficie S (3p.).

Posso parametrizzare S mediante $\Gamma(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2u^2 - v^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma_u \otimes \Gamma_v = \begin{pmatrix} -4u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix}$.

con $(u,v) \in E = \{0 \le 4u^2 + v^2 \le 1\}$. Allora l'area di S è

$$A(S) = \iint_E |\Gamma_u \otimes \Gamma_v|\,du\,dv = \iint_E \sqrt{16u^2 + 4v^2 + 1}\,du\,dv = (*)$$

CAMBIO DI COORDINATE $u = \frac{\rho}{2}\cos\theta$, $v = \rho\sin\theta$ con $\theta \in [0, 2\pi]$, $0 \le \rho \le 1$

$\Rightarrow du\,dv = \frac{1}{2}\rho\,d\theta\,d\rho$ e

$$(*) = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{4\rho^2 + 1}\,\frac{\rho}{2}\,d\rho\right)d\theta = \pi\int_0^1 \rho\sqrt{4\rho^2+1}\,d\rho = \begin{pmatrix} s = 4\rho^2 \\ ds = 8\rho\,d\rho \end{pmatrix}$$

$$\frac{\pi}{8}\int_0^4 \sqrt{1+s}\,ds = \frac{\pi}{8}\left[\frac{2}{3}(1+s)^{3/2}\right]_0^4 = \boxed{\frac{\pi}{12}\left(5\sqrt{5} - 1\right)}$$

(c) Si calcoli $\int_\gamma \vec F \cdot d\vec s$ dove $\gamma(t) = \frac{1}{2}\cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j} + (\frac{1}{2}\cos^2(t) - \sin^2(t))\mathbf{k}$ per $0 \le t \le 2\pi$ (3,5p.)

Notiamo che la curva descrive l'insieme $\{4x^2+y^2=1,\ z=2x^2-y^2\}$, infatti $4\left(\frac{1}{2}\cos(t)\right)^2+\left(\sin(t)\right)^2=\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$, mentre la seconda è ovvia.

Quindi γ descrive il bordo di S (e si vede che il verso di γ è coerente con S). Ne segue che: ($\vec f = \text{rot}\,\vec F$, come in (a))

$$\int_\gamma \vec F \cdot d\vec s = \iint_S \vec f \cdot \vec \nu \, d\sigma = \iint_E \vec f(\Gamma(u,v)) \cdot \Gamma_u(u,v) \otimes \Gamma_v(u,v)\, du\, dv$$

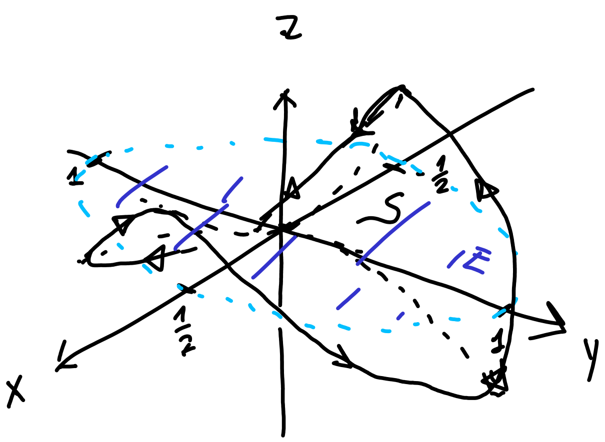
$$= \iint_E \begin{pmatrix} 2v(2u^2-v^2)\cos((2u^2-v^2)^2) \\ 4u(2u^2-v^2)\cos((2u^2-v^2)^2) \\ 3u^2v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix} du\, dv =$$

$$\iint_E 3u^2v^2\, du\, dv =$$ CAMBIO DI VAR. COME NEL PUNTO (b)

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 3\,\frac{\cos^2(\theta)}{4}\rho^2 \sin^2(\theta)\,\rho^2 \frac{\rho}{2}\, d\rho\right) d\theta = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\sin^2(\theta)\, d\theta \int_0^1 \rho^5\, d\rho =$$

$$\frac{3}{32}\int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta)\, d\theta \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{128}\int_0^{4\pi} \sin^2(t)\, dt \quad (t = 2\theta,\ dt = 2d\theta)$$

$$= \frac{1}{128}\int_0^{4\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{128}\cdot\frac{4\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{64}}$$



Pagina disponibile se serve spazio.