COGNOME E NOME: | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 30 giugno 2014. Primo foglio.

1. Sia data la funzione $f(x,y) = y + \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ posta eguale a zero in $(0,0)$.

   (a) Si dica se esistono e quanto fanno le derivate parziali di f in $(0,0)$ (1p.).

   (b) Si dica se esiste $f'(0,0)(1,1)$ (derivata in $(0,0)$ lungo la direzione $(1,1)$) (1p.).

   (c) Si dica se f è continua in $(0,0)$ (1p.).

(a) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \boxed{0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h+0}{h} = \boxed{1}$$

(DUNQUE LE DER. PARZ. ESISTONO E $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ $\frac{\partial}{\partial y}f(0,0) = 1$)

(b) $f'(0,0)(1,1) =$ (se esiste finito) $= \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0+h)-f(0,0)}{h} =$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h + \frac{h^2}{h^2+h^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{2h}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } h\to 0^+ \\ -\infty & \text{se } h\to 0^- \end{cases}$$

$\boxed{\text{DUNQUE } f'(0,0)(1,1) \text{ NON ESISTE}}$

(c) Se restringo f alla retta $y=x$ TROVO (con gli stessi calcoli fatti sopra)

$$f(x,x) = x + \frac{x^2}{x^2+x^2} = x + \frac{1}{2}.$$ DUNQUE $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{2}$

Dato che $f(0,0) = 0 \neq \frac{1}{2}$ $\boxed{f \text{ NON È CONTINUA IN } (0,0)}$

2. Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_\gamma z^2\, ds$ dove $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ è definita da $\gamma(t) := 4\cos(t)\mathbf{i} + 4\sin(t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$ (3p.).

Si ha $\gamma'(t) = -4\sin(t)\,\mathbf{i} + 4\cos(t)\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k} \Rightarrow$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{16\sin^2(t) + 16\cos^2(t) + 9} = \sqrt{16+9} = 5.$$

Allora, usando la definizione di integrale curvilineo (di 1° tipo)

$$\int_\gamma z^2\, ds = \int_0^\pi \gamma_3(t)^2 \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^\pi (3t)^2 \cdot 5\, dt = 15\left[t^3\right]_0^\pi = \boxed{15\pi^3}$$

3. Data la funzione $f(x, y) := 2e^{xy+1} + x^2 + y^2$:

(a) si trovino i punti stazionari per f (2p.) e si classifichi la loro natura (2p.);

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2ye^{xy+1} + 2x \;;\; \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 2xe^{xy+1} + 2y \quad \text{da cui}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (*) \begin{cases} ye^{xy+1} + x = 0 \\ xe^{xy+1} + y = 0 \end{cases}$$

Ricavo y dalla II^a $\Rightarrow$ $y = -x\, e^{xy+1}$

e lo metto nella I^a $\Rightarrow$ $-x\left(e^{xy+1}\right)^2 + x = 0$. Ne ricavo

$x = 0$ OPPURE $\left(e^{xy+1}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow e^{xy+1} = 1 \Leftrightarrow xy = -1$

Se $x = 0$ DA $(*)$ $\boxed{(x,y) = (0,0)}$. Se $xy = -1$ da $(*)$

VIENE $\begin{cases} x + y = 0 \\ xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y$ e $x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{(x,y) = \pm(1,-1)}$

Inoltre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y^2 e^{xy+1} + 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^2 e^{xy+1} + 2$ mentre

$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = 2e^{xy+1} + 2xy\, e^{xy+1}$. Ne ricavo:

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2e \\ 2e & 2 \end{pmatrix} \leftarrow$ determinante < 0

$\boxed{(0,0) \text{ SELLA}}$

$H_f(\pm(1,-1)) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ determ. > 0 traccia > 0

$\boxed{\pm(1,-1) \text{ MINIMI LOCALI}}$

(b) si trovino $\max\limits_Q f$ e $\min\limits_Q f$ dove $Q := \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4\}$ (2p.).

Cerchiamo prima i max/min per f su $\partial Q = \{x^2+y^2=4\}$. Per questo possiamo parametrizzare ∂Q come immagine di $\gamma(t)=(2\cos(t), 2\sin(t))$ e quindi studiare $f(\gamma(t)) = e^{4\cos(t)\sin(t)+1} + 4\cos^2(t)+4\sin^2(t) = e^{2\sin(2t)+1} + 4$, per $0 \le t \le 2\pi$. Derivando rispetto a t ed eguagliando a zero troviamo $4\cos(2t)e^{2\sin(2t)+1} = 0 \iff \cos(2t)=0 \iff 2t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\iff t = \frac{\pi}{4} / \frac{3}{4}\pi / \frac{5}{4}\pi / \frac{7}{4}\pi$ che corrispondono ai quattro punti $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ su cui f vale $e^{\pm 2+1}+4$. Dunque su ∂Q $\max = e^3+1$, $\min = e+1$. Però i due punti critici $\pm(1,-1)$ sono dentro Q $(1^2+(-1)^2=2<4)$ e su questi pti f vale $e^0+1+1 = 4 < e+1 \Rightarrow$ $\boxed{\min\limits_Q f = 4;\ \max\limits_Q f = e^3+1}$

4. Si risponda ai seguenti quesiti barrando una delle caselle (1 punto ciascuno).

(a) L'insieme $\Omega := \{(x, y) : e^{x^2y^2} + 3x^2 + 5y^2 < 1\}$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$ il cui bordo $\partial\Omega$ è descritto da una curva regolare $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(b) L'insieme $\Omega := \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ non è semplicemente connesso $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(c) Se una serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza infinito, allora essa converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}^N$ $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\cancel{\text{FALSO}}}$.

(d) Se $\vec{f}$ è un campo tale che $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0$ per ogni curva γ con γ chiusa, allora $\vec{f}$ è irrotazionale $\boxed{\cancel{\text{VERO}}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

5. Siano

$$\vec{f}(x, y, z) := x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} - 3z(x^2 + y^2)\mathbf{k}, \qquad C := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le 1\}.$$

(a) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ uscente da C (1p.).

Si vede che $\operatorname{div} \vec{f} = 3x^2 + 3y^2 - 3(x^2+y^2) = 0 \Rightarrow$

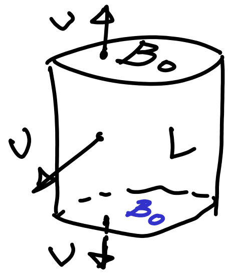
$$\int_{\partial C} \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma = \iint_C \operatorname{div}(\vec{f})\, dx\, dy = \boxed{0}$$

(b) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ uscente dalla superficie laterale di C, cioè da $\{x^2+y^2=1, 0\le z\le 1\}$ (2p.).

Il bordo di C è fatto da $L \cup B_0 \cup B_1$ dove

$B_0 = \{x^2+y^2 \le 1,\ z=0\}$ e

$B_1 = \{x^2+y^2 \le 1,\ z=1\}$



Dunque $\quad 0 = \Phi(\vec{f}, \partial C) = \Phi(\vec{f}, B_0) + \Phi(\vec{f}, L) + \Phi(\vec{f}, B_1)$

Inoltre $\Phi(\vec{f}, B_0) = \iint_{B_0} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \iint_{B_0} -f_3\, d\sigma = 0$

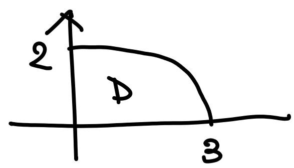
perché la terza componente di f è $-3z(x^2+y^2)=0$ su B_0. Infine

$\Phi(\vec{f}, B_1) = \iint_{B_1} f_3\, d\sigma = \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} -3(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -3\rho^2 \rho\, d\rho\, d\theta =$

$-3\cdot 2\pi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{3}{2}\pi$. PER DIFFERENZA $\Phi(f, L) = \boxed{\frac{3}{2}\pi}$

CONCLUSIONE DELL'ULTIMO ESERCIZIO

Passo in coordinate ellittiche:



$u = 3\rho\cos\theta \quad v = 2\rho\sin\theta$

$\Rightarrow du\,dv = 6\rho\, d\rho\, d\theta \qquad 0\le\rho\le 1 \quad 0\le\theta\le\pi/2$

$$(*) = 9\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 6\rho\; 3\rho\cos\theta\; 2\rho\sin\theta\; e^{4\cdot 9\rho^2\cos^2\theta + 9\cdot 4\rho^2\sin^2\theta}\, d\rho\right) d\theta =$$

$$324\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^1 \rho^3 e^{36\rho^2}\, d\rho = \quad (\text{sostituisco } s = t^2)$$

$$81\int_0^{\pi/2}\sin(2\theta)\, d\theta \int_0^1 s\, e^{36s}\, ds = \quad \left(\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\, d\theta = \left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} = 1\right)$$

$$81\left\{\left[\frac{s\, e^{36s}}{36}\right]_0^1 - \frac{1}{36}\int_0^1 e^{36s}\, ds\right\} = \frac{9}{4}e^{36} - \frac{9}{4}\left[\frac{e^{36s}}{36}\right]_0^1 =$$

$$\frac{9}{4}\left(1-\frac{1}{36}\right)e^{36} + \frac{1}{16} = \boxed{\frac{35e^{36}+1}{16}}$$

COGNOME E NOME:

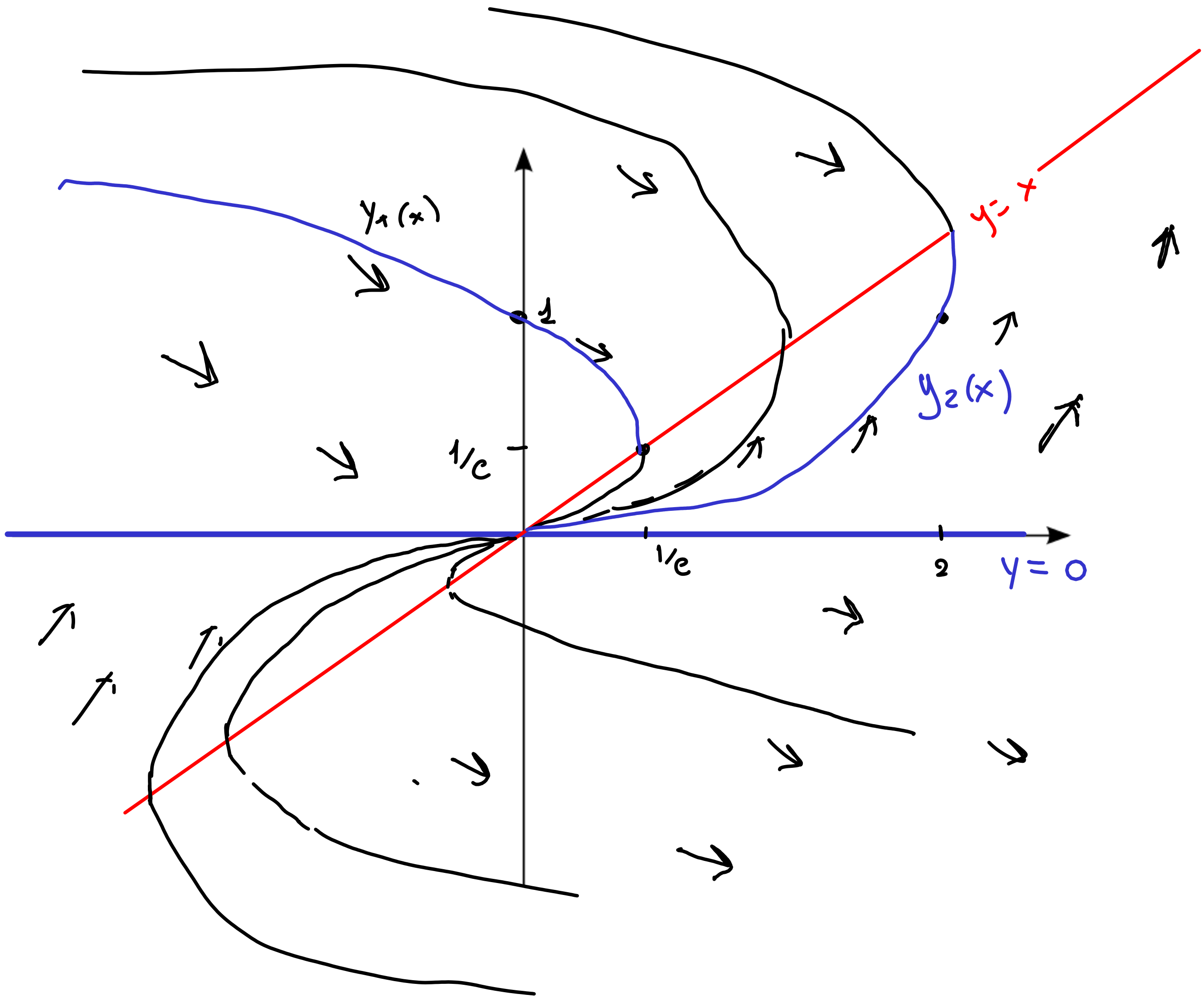
Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 30 giugno 2014. Secondo foglio.

6. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y}{x-y}, \qquad y(x_0) = y_0.$$

(a) Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy (1p.). Si trovino le soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).

Se pongo $F(x,y) := \frac{y}{x-y}$ (così che l'eq. è $y' = F(x,y)$), allora F è definita su $\{x \neq y\}$ e in tale insieme vale il t. di esistenza, poiché $\exists$ continua $\frac{\partial}{\partial y} F(x,y)$. L'unica sol. costante è $y=0$. Il segno di $F(x,y)$ dipende dai segni di y e di $x-y$ ed è rappresentato sotto ($\searrow$ indica $F<0$ e $\nearrow$ indica $F>0$)



(b) Si trovi un fattore integrante per l'equazione, avente la forma $\lambda(x,y) = \lambda(y)$ (2p.).

deve essere $\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(y)(-y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(y)(x-y)\right) \iff$
$-\lambda'(y)y - \lambda(y) = \lambda(y) \iff \lambda'(y) = -2\frac{\lambda(y)}{y}$

DUNQUE $\boxed{\lambda(y) = \frac{1}{y^2}}$ (+ costante.)

(c) Si trovi un integrale primo per l'equazione (2p.).

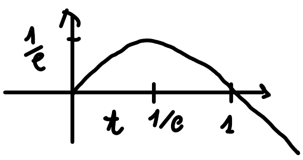
Deve essere $\phi_x = -\frac{y}{y^2} = -\frac{1}{y} \Rightarrow \phi(x,y) = -\frac{x}{y} + c(y)$

da cui $\phi_y = -\frac{x}{y^2} + c'(y)$. Eguagliando al secondo termine
$\frac{x}{y^2} + c'(y) = \frac{x-y}{y^2} \iff c'(y) = -\frac{1}{y} \iff c(y) = -\ln|y| + c.$

DUNQUE $\boxed{\Phi(x,y) = -\frac{x}{y^2} - \ln(|y|)\,(+c)}$ (ϕ è costante sulle traiettorie)

(d) Si trovi un'espressione per la soluzione che parte da $(0,1)$ e se ne tracci il grafico (1p.).

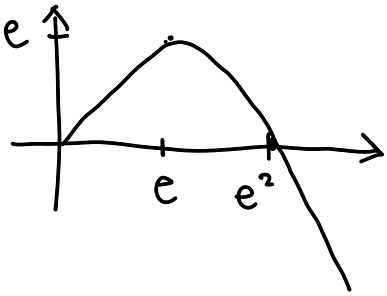
Si ha $\phi(0,1) = 0 \Rightarrow$ la soluzione $y_1(x)$ verifica $-\frac{x}{y_1(x)} - \ln y_1(x) = 0$
($y(x) > 0\ \forall x$). Dunque trovo $x = -y(x)\ln(y(x))$
che consente di tracciare il grafico di $y(x)$ (facendo il grafico di
$\varphi(t) = -t\ln(t)$



e "rovesciandolo" (vedi anche sotto)

(e) Si trovi un'espressione per la soluzione che parte da $(2,1)$ e se ne tracci il grafico (1p.).

Dato che $\phi(2,1) = -2$ la sol. $y_2(x)$ verifica $\frac{x}{y_2(x)} + \ln(y_2(x)) = 2$.
$\iff x = y_2(x)\left(2 - \ln(y_2)\right)$. Studio $\varphi(t) = t(2 - \ln(t))$ $\varphi(0) = \varphi(e^2) = 0$
$\varphi'(t) = 2 - \ln(t) - 1 = 1 - \ln(t)$



"rovescio" questo grafico e traccio $y^2(x)$

7. Si consideri l'equazione differenziale:

$$xy'' + (1-x)y' + 3y = 0$$

(a) si dica se (0,5p. per domanda) l'equazione è:

lineare	~~VERO~~	FALSO;
omogenea	~~VERO~~	FALSO;
in forma normale	VERO	~~FALSO~~.

(b) Si cerchi la soluzione y come una serie di potenze centrata in zero cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Per questo si trovi una relazione ricorsiva tra i coefficienti a_n (2p.).

Se $y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \Rightarrow y'(x) = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1}$, $y''(x) = \sum_2^\infty n(n-1) a_n x^{n-2}$

$$\Rightarrow xy'' + (1-x)y' + 3y = \sum_2^\infty n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_1^\infty n a_n x^{n-1} - \sum_1^\infty n a_n x^n + 3\sum_0^\infty a_n x^n =$$

(metto $m = n-1$ nel I° e II° pezzo e $m = n$ nel III° e IV°)

$$\sum_1^\infty (m+1)m\, a_{m+1} x^m + \sum_0^\infty (m+1) a_{m+1} x^m - \sum_1^\infty m a_m x^m + 3\sum_0^\infty a_m x^m =$$

* qui posso anche mettere zero perché se $m=0$ $(m+1)m\, a_{m+1} = 0$

* qui posso mettere zero perché $m a_m = 0$ per $m = 0$

$$\sum_{m=0}^\infty \left\{ \left[(m+1)m + (m+1)\right] a_{m+1} + \left[-m+3\right] a_m \right\} x^m =$$

$$\sum_{m=0}^\infty \left\{ (m+1)^2 a_{m+1} - (m-3) a_m \right\} x^m .$$

Se voglio che venga 0 trovo

(R) $$\boxed{a_{m+1} = \frac{m-3}{(m+1)^2} a_m \quad \forall m \geq 0}$$

(c) Si dica quante soluzioni verificano la condizione $y(0) = 6$ e se ne scriva esplicitamente una (1,5p).

$y(0) = 6$ vuol dire $a_0 = 6$. Da (R) ottengo allora:

$a_1 = \frac{0-3}{(0+1)^2} a_0 = \frac{-3 \cdot 6}{1} = \boxed{-18}$; $a_2 = \frac{1-3}{(1+1)^2} a_1 = \frac{-2}{4}(-18) = \boxed{9}$

$a_3 = \frac{2-3}{(2+1)^2} a_2 = \frac{-1}{9} \cdot 9 = -1$, $a_4 = \frac{3-3}{(3+1)^2} a_3 = 0$

e allora $a_n = 0 \ \forall n \geq 4$. DUNQUE L'UNICA SOL. È

$$\boxed{y(x) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3}$$

(d) Si faccia vedere che tutte le soluzioni scrivibili come serie di potenze in zero sono dei polinomi (1p.).

Come visto nel punto (c), se metto $n=3$ in (R) trovo

$a_4 = 0 \cdot a_3 \Rightarrow a_4 = 0$. ALLORA $a_5 = \frac{4-3}{5^2} a_4 = 0$

e (per induzione) tutti gli a_n sono ZERO da $n=4$ in poi.

CIÒ SIGNIFICA CHE $y(x)$ è un polinomio di grado 3

8. Siano:

$$\vec{f}(x,y,z) := x^3y^2e^z\mathbf{i} - yz^2e^{xy}\mathbf{j} + 9ze^{4x^2+9y^2}\mathbf{k}, \qquad S := \left\{(x,y,z) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, z = xy, x \geq 0, y \geq 0\right\}.$$

Si scriva una parametrizzazione cartesiana per S con la normale diretta verso l'alto (1p.) e si calcoli l'integrale di superficie $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma$ (5p.).

La parametrizzazione è $\Gamma(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ uv \end{pmatrix}$ con $(u,v) \in D$

dove $D = \{ \frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{4} \leq 1, u \geq 0, v \geq 0 \}$ ("quarto" di ellisse). Notiamo che

$\Gamma_u \otimes \Gamma_v = \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix}$ (per la formula vista a lezione) che è

concorde con l'asse z.

Per la def di flusso (cioè di $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma$) si ha

$$\Phi(\vec{f}, S) = \iint_D \vec{f}(\Gamma(u,v)) \cdot \Gamma_u(u,v) \otimes \Gamma_v(u,v)\, du\, dv =$$

$$\iint_D \begin{pmatrix} u^3v^2e^{uv} \\ -v(uv)^2e^{uv} \\ 9uve^{4u^2+9v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v \\ -u \\ 1 \end{pmatrix} du\, dv = \iint_D 9uve^{4u^2+9v^2}\, du\, dv = (*)$$

CONTINUA SUL IV° FOGLIO