COGNOME E NOME:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 9 giugno 2014. Primo foglio.

1. Si consideri la funzione $G(x,y) := e^{xy} - x^2(1-y)$. Si dica se esiste una funzione $g(y)$ definita nell'intorno di 0 tale che $G(x,y) = 0$ se e solo se $x = g(y)$ (per le y nell'intorno di 0); in caso affermativo si calcolino $g(0)$ e $g'(0)$(3p.);

Notiamo che $G(1,0) = e^{1\cdot 0} - 1^2(1-0) = 1-1 = 0$ e che

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = y e^{xy} - 2x(1-y) \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial x}(1,0) = -2$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = x e^{xy} + x^2 \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial y}(1,0) = 1+1 = 2$$

Per il teorema del Dini l'insieme $S = \{(x,y) : G(x,y) = 0\}$ è "esplicitabile" rispetto a x, essendo $\frac{\partial G}{\partial x}(1,0) \neq 0$ (lo sarebbe anche rispetto a y), cioè $\exists\ g :]-\delta,\delta[\to \mathbb{R}$ tale che $\boxed{g(0) = 1}$

e in un intorno di $(1,0)$ si ha $S = \{(g(y), y) : y \in]-\varepsilon,\varepsilon[\}$.

Inoltre g è derivabile e

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial}{\partial y} G(g(y),y)}{\frac{\partial}{\partial x} G(g(y),y)} \Rightarrow g'(0) = -\left.\frac{x e^{xy} + x^2}{y e^{xy} - 2x(1-y)}\right|_{\substack{x=1\\y=0}} = -\frac{2}{-2} = \boxed{1}$$

Nota: si può anche applicare Dini al punto $(-1,0)$ (che verifica $G=0$) e ottenere una g_1 tale che $g_1(0) = -1$ e .... VANNO BENE ENTRAMBE (ne basta una)

2. Si calcoli la lunghezza della curva $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) := \cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$ (3p.).

Si ha $\dot\gamma(t) = -\sin(t)\,\mathbf{i} + \cos(t)\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k} \Rightarrow$

$$\ell(\gamma) = \int_0^\pi |\dot\gamma(t)|\,dt = \int_0^\pi \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 9}\,dt = \int_0^\pi \sqrt{10}\,dt$$

$$= \boxed{\sqrt{10}\,\pi}$$

3. Data la funzione $f(x,y) := e^{x^2+y^2} - 2e^2xy$:

(a) si trovino i punti stazionari per f (2p.) e si classifichi la loro natura (2p.);

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\, e^{x^2+y^2} - 2e^2 y \;;\; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\, e^{x^2+y^2} - 2e^2 x$$

e allora $\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} x e^{x^2+y^2} = e^2 y \\ y e^{x^2+y^2} = e^2 x \end{cases} \iff \begin{cases} x e^{x^2+y^2-2} = y \\ y e^{x^2+y^2-2} = x \end{cases}$

Ricavando y dalla prima e mettendola nella seconda si trova

$x\left(e^{x^2+y^2-2}\right)^2 = x \iff x = 0$ (da cui $y=0$) oppure $e^{x^2+y^2-2} = 1$.

La seconda condizione implica $x^2+y^2=2$, inoltre mettendola nel sistema iniziale si trova $x e^2 = y e^2$, dunque $x=y$. IN DEFINITIVA I PTI STAZ. sono $\boxed{(0,0) \text{ e } \pm(1,1)}$. Calcoliamo le derivate seconde: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{x^2+y^2} + 4x^2 e^{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^{x^2+y^2} + 4y^2 e^{x^2+y^2}$

$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = 4xy\, e^{x^2+y^2} - 2e^2$. Ne segue che gli Hessiani sono:

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2e^2 \\ -2e^2 & 2 \end{pmatrix}$ HA DETERMINANTE <0 $\Rightarrow$ (0,0) SELLA $\quad Hf(\pm(1,1)) = \begin{pmatrix} 6e^2 & 2e^2 \\ 2e^2 & 6e^2 \end{pmatrix}$ DET. >0 TRACCIA >0 $\Downarrow$ $\pm(1,1)$ MINIMI

(b) si trovino $\max_\Omega f$ e $\min_\Omega f$ dove $\Omega := \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4\}$ (si suggerisce di descrivere $\partial\Omega$ mediante $\gamma(\theta) = 2\cos(\theta)\mathbf{i} + 2\sin(\theta)\mathbf{j}$) (2p.).

I max/min su Ω sono da cercare tra i pti stazionari del punto a e tra i max/min di f su $\partial\Omega$. NOTA: $f(0,0) = 1$, $f(\pm(1,1)) = -e^2$

Se parametrizzo $\partial\Omega$ come $\{(2\cos(\theta), 2\sin(\theta)) : 0 \le \theta \le 2\pi\} \Rightarrow$

$f(2\cos(\theta), 2\sin(\theta)) = e^{4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta} - 8\sin(\theta)\cos(\theta) = e^4 - 4\sin(2\theta)$

Dato che il seno varia tra -1 e 1 si ha

$\min_{(x,y)\in\partial\Omega} f(x,y) = e^4 - 4 \qquad \max_{(x,y)\in\partial\Omega} f(x,y) = e^4 + 4$. DUNQUE:

$\max_{(x,y)\in\Omega} f(x,y) = e^4 + 4$ (né $(0,0)$ né $\pm(1,1)$ sono di max) mentre

$\min_{(x,y)\in\Omega} f(x,y) = \min(e^4-4, -e^2) = -e^2$ (perché si vede che $e^4 - 4 > -e^2$)

4. Si risponda ai seguenti quesiti barrando una delle caselle (1 punto ciascuno).

(a) Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^2$ e se $f:\Omega \to \mathbb{R}$ ammette derivate parziali in tutti i punti di Ω, allora f è continua in Ω $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$.

(b) Il teorema di Schwartz garantisce che la matrice Hessiana è $\boxed{\text{SIMMETRICA}}$ $\boxed{\text{DEFINITA POSITIVA}}$.

(c) Il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ è infinito $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$. (è zero)

(d) Se $\vec{F}$ è un potenziale vettore per $\vec{f}$, allora anche $\vec{F} + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ lo è $\boxed{\text{VERO}}$ $\boxed{\text{FALSO}}$. (perché $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} = \operatorname{grad} \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$)

5. Sia data $f(t) = \cosh(t)$ per $-\pi \le t \le \pi$.

(a) Si calcoli la serie di Fourier di f(4p.).

f è pari $\Rightarrow b_n = 0 \ \forall n$. $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\sinh(t)\right]_{-\pi}^{\pi} = \boxed{\frac{\sinh(\pi)}{\pi}}$

Se $n \ge 1$ $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh(t)\cos(nt)\,dt =$ (per parti) $\frac{1}{\pi}\left[\sinh(t)\cos(nt)\right]_{-\pi}^{\pi}$

$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sinh(t)\, n \sin(nt)\,dt = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\cos(n\pi) + \frac{n}{\pi}\underbrace{\left[\cosh(t)\sin(n\pi)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} +$

$- \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cosh(t)\, n\cos(nt)\,dt = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}(-1)^n - n^2 a_n \Rightarrow$

$$\boxed{a_n = \frac{2\sinh(t)(-1)^n}{\pi(1+n^2)}}$$

(per $n \ge 1$). IN DEFINITIVA:

$$\cosh(t) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nt)}{1+n^2} \quad (*)$$

(b) Si dica se tale serie converge uniformemente su $[-\pi,\pi]$(1p.).

Dato che $b_n = 0$ e $\sum_n |a_n|$ converge, dato che $|a_n| \simeq \frac{\text{costante}}{n^2}$

$\Rightarrow$ la serie converge totalmente, dunque uniformemente

(c) Si deduca da quanto sopra il valore della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$(2p.).

Se metto $t = \pi$ in $(*)$ sopra trovo

$$\cosh(\pi) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \boxed{\frac{\pi\cosh(\pi) - \sinh(\pi)}{2\sinh(\pi)} = \frac{\pi}{2}\operatorname{cotanh}(\pi) - \frac{1}{2}}$$

Pagina utilizzabile se manca spazio.

COGNOME E NOME:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compito del 9 giugno 2014. Secondo foglio.

6. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{-y}{2x+3y}, \qquad y(x_0) = y_0.$$

(a) Si dica per quali (x_0, y_0) vale il teorema di esistenza e unicità di Cauchy (1p.).

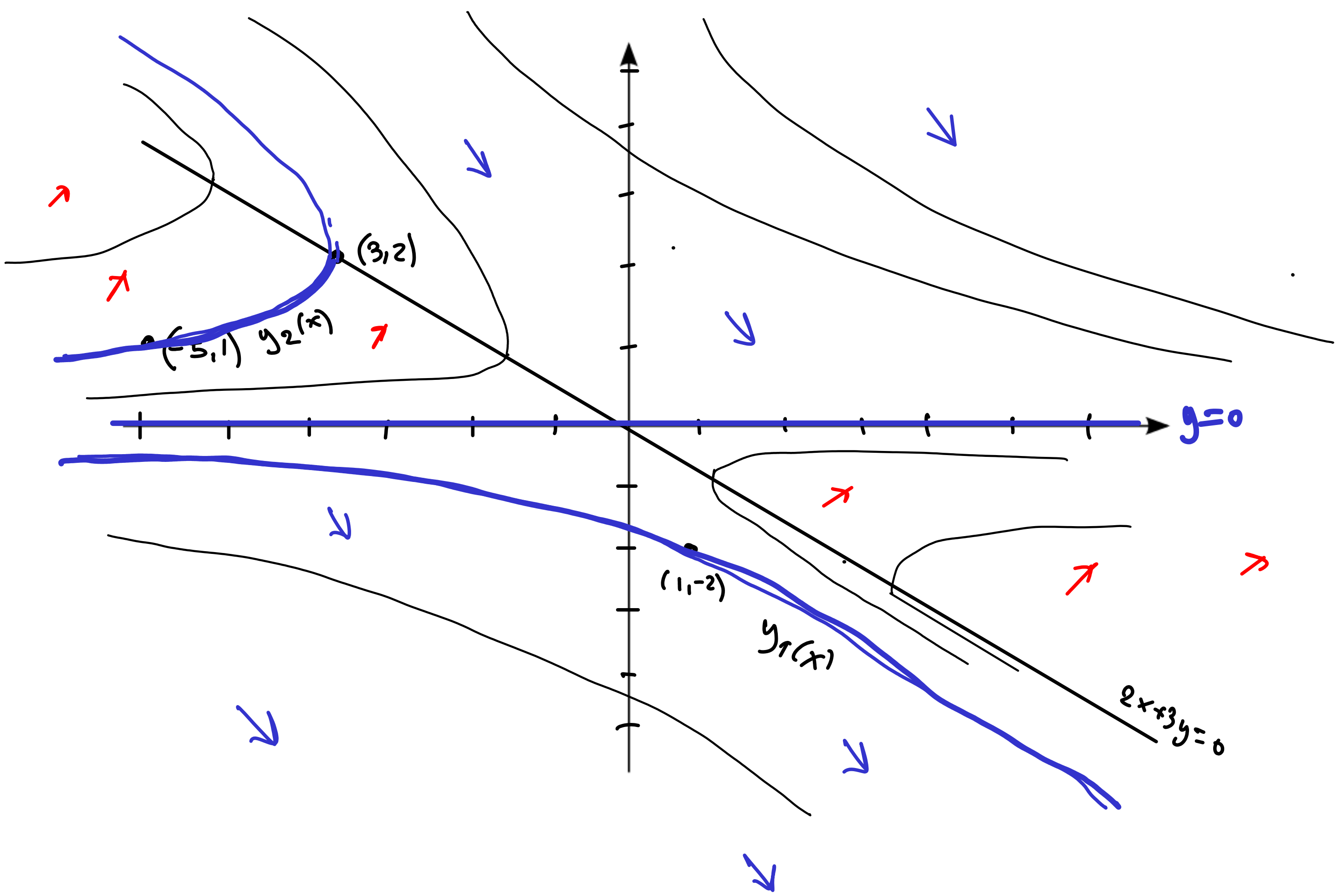
Il teorema vale nell'insieme $\{(x,y) : 2x+3y \neq 0\}$

(infatti in questi punti $F(x,y) = \frac{-y}{2x+3y}$ è differenziabile con differenziale continuo, dunque è localmente lipschitziana)

(b) Si trovino le soluzioni costanti e le zone dei punti (x_0, y_0) dai quali la soluzione parte con derivata positiva o negativa. Si riportino queste informazioni nel diagramma sottostante (1p.).

L'unica sol. costante è $y(x) = 0$ (se $x \neq 0$ ..)

Le sol. sono crescenti in $\{2x+3y>0,\ y<0\} \cup \{2x+3y<0,\ y>0\}$ mentre sono decrescenti in quello che rimane :



(c) Si trovi un fattore integrante per l'equazione, avente la forma $\lambda(x,y) = \lambda(y)$ (2p.).

λ fattore integrante significa $\frac{\partial}{\partial y}\lambda(x,y)y = \frac{\partial}{\partial x}\lambda(x,y)(2x+3y)$

Se $\lambda(x,y)=\lambda(y)$ la condizione diventa:

$$\lambda'(y)y + \lambda(y) = \lambda(y)\cdot 2 \iff \lambda'(y)y = \lambda(y) \iff \lambda'(y) = \frac{\lambda(y)}{y}$$

che è un'eq. diff. lineare in λ, avente come soluzione

$\lambda(y) = c\,y$ (con $c \in \mathbb{R}$). DUNQUE $\lambda(y) = y$ è un fatt. integrante

Questo significa che il campo:

$$y^2\,i + y(2x+3y)\,j \quad \text{è conservativo} \quad (**)$$

(d) Si trovi un integrale primo per l'equazione (2p.).

Per quanto fatto a lezione, se $F(x,y)$ è un potenziale per il campo in $(**)$ $\Rightarrow$ F è un integrale primo. Dunque

$$\left.\begin{array}{l} F_x = y^2 \iff F(x,y) = xy^2 + c(y) \\ F_y = y(2x+3y) \iff F(x,y) = xy^2 + y^3 + d(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} F(x,y) = y^2(x+y) \\ (+\text{costante}) \\ \text{è un integrale primo} \end{array}}$$

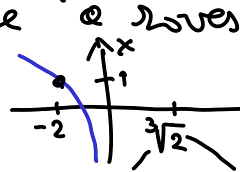
Questo significa che, se $y(x)$ risolve l'equazione diff. $\Rightarrow$

$$y(x)^2\,(x+y(x)) = c \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \quad (***)$$

(e) Si trovino esplicitamente le soluzioni che partono da $(1,-2)$, da $(-5,1)$ (trovando anche gli intervalli di esistenza massimale) e le si riportino nel diagramma sopra (1+2p.).

Se mettiamo $x=1$ $y=-2$ in $(***)$ $\Rightarrow$ $c = c_1 = -1$

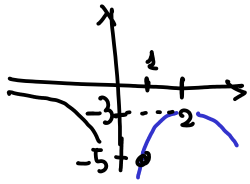
• Se ne ricavo che deve essere $x = \frac{-1}{y^2} - y$, che descrive la soluzione $y_1(x)$. (anche se "a rovescio"). Facendo il grafico di $x_1(y) = \frac{-1}{y^2} - y$ si trova



y. Il ramo di destra

(riflesso rispetto alla diagonale) è il grafico di $y_1(x)$. Si vede che $\underline{x}=-\infty$ $\bar{x}=+\infty$ $\lim_{x\to-\infty} y_1(x)=0^-$ $\lim_{x\to+\infty} y_1(x)=+\infty$

• Se metto $x=-5$ e $y=1$ in (***) trovo $c=4$ e quindi la soluzione $x=-\frac{4}{y^2}-y$. Facendo il grafico di $x_2(y)=-\frac{4}{y^2}-y$ si trova il grafico



(noto che $x_2'(y)=\frac{8}{y^3}-1$ che si annulla in $y=2$ e che $x_2(2)=-3$)

Prendendo il ramo di sinistra, con $0<y<2$, e riflettendo si ha il grafico della $y_2(x)$. Si noti che $\underline{x}=-\infty$, $\bar{x}=-3$ e che $\lim_{x\to-\infty} y(x)=0$, $\lim_{x\to-3} y(x)=2$ (in effetti $(-3,2)$ sta sulla retta $2x+3y=0$)

7. Siano:

$$\vec{f}(x,y,z) := 3yz^2\mathbf{i} - 3xz^2\mathbf{j} + 2xy\mathbf{k}, \qquad \Omega := \{(x,y,z) : 2x+2y \le z \le 14 - x^2 - y^2\}.$$

(a) Si calcoli $\iint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma$ ($\vec{\nu}$ è la normale esterna)(1p.).

Si vede subito che $\operatorname{div}(\vec{f})=0 \Rightarrow$

$$\iint_{\Omega} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \boxed{0}$$

(b) Si scriva una parametrizzazione cartesiana per la "superficie superiore" $S := \{2x+2y \le z = 14 - x^2 - y^2\}$ (in modo che la normale sia sempre uscente da Ω) (1p.).

Se $(x,y,z)\in S$ si ha $2x+2y \le 14-x^2-y^2 \iff x^2+2x+y^2+2y \le 14$ $\iff (x+1)^2+(y+1)^2 = 16 \iff (x,y)\in D =$ cerchio di centro $(1,1)$ raggio 4.

Viceversa è chiaro che, se $(u,v)\in D$ e $g(u,v)=14-u^2-v^2$ allora il vettore $\Gamma(u,v)=\begin{pmatrix}u\\v\\g(u,v)\end{pmatrix}$ è in S (rifacendo a rovescio gli stessi conti)

Dunque $\boxed{\Gamma(u,v) = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + (14-u^2-v^2)\,\mathbf{k}}$ è la parametrizzazione richiesta

Si noti che $\Gamma_u \otimes \Gamma_v = \begin{pmatrix}2u\\2v\\1\end{pmatrix}$ per cui $\Gamma_u\otimes\Gamma_v$ è concorde con $\mathbf{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

(c) Si calcoli $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{\nu}\, d\sigma$ (3p.).

Si ha, usando la $T(u,v)$,

$$\iint_S \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = \iint_D \vec{f}(T(u,v)) \cdot T_u(u,v) \otimes T_v(u,v)\, du\, dv =$$

$$\iint_D \begin{pmatrix} 3v(14-u^2-v^2)^2 \\ -3u(14-u^2-v^2)^2 \\ 2uv \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix} du\, dv = \iint_D 2uv\, du\, dv = \begin{pmatrix} u = 1+\rho\cos\theta \\ v = 1+\rho\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^4 \rho\, 2(1+\rho\cos\theta)(1+\rho\sin\theta)\, d\rho\right) d\theta =$$

$$2\int_0^4 \left(\int_0^{2\pi} \rho\, d\theta + \underbrace{\int_0^{2\pi} \rho^2(\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \rho^3 \cos\theta \sin\theta\, d\theta}_{=0} \right) d\rho = 2\cdot 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^4 = 32\pi$$

(d) Si trovi (se esiste) un potenziale vettore $\vec{F}$ per $\vec{f}$(2p.).

Cerco $\vec{F} = F_1 i + F_2 j + F_3 k$ con $F_3 = 0$. Allora $F_{2,z} = -f_1$, $F_{1z} = f_2$

$F_{2x} - F_{1y} = f_3$ cioè $F_2 = -yz^3 + c(x,y)$ $F_1 = -xz^3 + d(x,y)$ e

$F_{2x} - F_{1y} = c_x - d_y = 2xy$ per cui posso prendere (per esempio) $c = x^2 y$, $d = 0$

DUNQUE UN POSSIBILE $\vec{F}$ è dato da

$$\boxed{\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -xz^3 \\ -yz^3 + x^2 y \\ 0 \end{pmatrix}}$$

(a cui posso aggiungere un qualunque $\nabla\phi$).

(e) Si calcoli $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$, dove γ descrive il bordo di S percorso con verso coerente con $\vec{\nu}$ (1p.).

Per il teorema di Stokes

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, d\sigma = 32\pi$$