COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 5 giugno 2014

1. Si consideri la funzione definita da $f(t) := t(t^2 - \pi^2)$ per $-\pi \le t \le \pi$ e periodica di periodo 2π.

   (a) Si calcoli lo sviluppo in serie di Fourier di f (5p.).

Notiamo che f è dispari $\Rightarrow a_n = 0 \ \forall n$. Invece $b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t(t^2-\pi^2)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t(t^2-\pi^2)\sin(nt)\,dt = \Big[\underbrace{\frac{2}{\pi}\, t(t^2-\pi^2)\Big(\frac{-\cos(nt)}{n}\Big)}_{=0 \text{ se } t=0,\ t=\pi}\Big]_0^{\pi}$$

$$+\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}(3t^2-\pi^2)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{n\pi}\Big[\underbrace{(3t^2-\pi^2)\frac{\sin(nt)}{n}}_{=0 \text{ se } t=0,\ t=\pi}\Big]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{\pi} 6t\sin(nt)\,dt$$

$$= -\frac{2}{\pi n^2}\Big[6t\,\frac{(-\cos(nt))}{n}\Big]_0^{\pi} - \frac{12}{n^3\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt =$$

$$\frac{12}{\pi n^3}\big(\pi\cos(n\pi)\big) - \frac{12}{n^3\pi}\underbrace{\Big[\frac{\sin(nt)}{n}\Big]_0^{\pi}}_{=0} = \boxed{\frac{12}{n^3}(-1)^n}$$

Dunque $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n \sin(nt)}{n^3}$

   (b) Si dica (motivando) se si può derivare per serie nella serie del punto precedente (2p.).

Per quanto visto sopra, la serie di Fourier di f è:

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$ dove $b_n = \frac{12}{n^3}(-1)^n$.

Dato che $|n a_n| = \frac{12}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |n a_n| < +\infty$ e questo implica che f è derivabile e $f' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(b_n \sin(nt)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos(nt)$

(c) Si usi quanto sopra per trovare il valore della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ (3p.).

Se uso Parseval $\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt = \pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{144}{n^6}$.

Dato che $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt = 2\int_0^{\pi} t^2(t^4 - 2\pi^2 t^2 + \pi^4)\,dt = 2\left[\frac{t^7}{7} - \frac{2\pi^2 t^5}{5} + \frac{\pi^4 t^3}{3}\right]_0^{\pi} =$

$2\pi^7\left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) = 2\pi^7 \frac{15-42+35}{105} = 2\pi^7 \frac{8}{105} = \frac{16\pi^7}{105}$

SI HA $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{1}{144\pi} \frac{16}{105}\pi^7 = \frac{\pi^6}{9 \cdot 105} = \boxed{\frac{\pi^6}{945}}$

2. Data l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{1+y+xy}{x(1+x)}$$

(a) Si trovi un fattore integrante del tipo $\lambda(x, y) = \lambda(xy)$ (4p.).

λ deve verificare $\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(xy)(1+y+xy)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(xy)x(1+x)\right] \Leftrightarrow$

$x\lambda'(xy)(1+y+xy) + \lambda(xy)(1+x) = y\lambda'(xy)x(1+x) + \lambda(xy)(1+2x) \Leftrightarrow$

$\lambda'(xy)(x + \cancel{xy} + \cancel{x^2y} - \cancel{xy} - \cancel{x^2y}) + \lambda(xy)(1+x-1-2x) = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda'(xy)x + \lambda(xy)(-x) = 0 \Leftrightarrow$ (a parte $x=0$) $\lambda' = \lambda$

DUNQUE TROVO $\lambda(t) = e^t$ e quindi

$\lambda(x,y) = e^{xy}$

QUESTO SIGNIFICA CHE IL CAMPO $\vec{f}(x,y) = e^{xy}\begin{pmatrix} 1+y+xy \\ x(1+x) \end{pmatrix}$

È IRROTAZIONALE E QUINDI CONSERVATIVO (perché $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso)

(b) Si trovi un integrale primo per l'equazione(3p.).

CERCO F potenziale per $\vec{f}$: $\frac{\partial}{\partial x}F = e^{xy}(1+y+xy) \iff$

$F(x,y) = (1+y)\int e^{xy}dx + \int xye^{xy}dx = \frac{(1+y)}{y}e^{xy} + xe^{xy} - \int e^{xy}dx$

$= \left(\cancel{\frac{1}{y}} + 1 + x\right)e^{xy} - \cancel{\frac{e^{xy}}{y}} + c(y) = (1+x)e^{xy} + c(y)$. Se derivo rispetto a y

$\frac{\partial}{\partial y}\left((1+x)e^{xy} + c(y)\right) = (1+x)x\, e^{xy} + c'(y)$ che deve essere $= (1+x)xe^{xy}$

$\Rightarrow \boxed{F(x,y) = (1+x)e^{xy}}$. Per la teoria svolta tale F è un integrale primo per l'equazione

(c) Si trovi la soluzione $y(x)$ verificante la condizione $y(1) = 2$ (2p.).

Deve essere $(1+x)e^{xy(x)} = c$ per una opportuna $c \in \mathbb{R}$. Se prendo $x = 1 \Rightarrow (1+1)e^{1\cdot 2} = c \iff c = 2e^2$. Ne ricavo:

$\ln\left((1+x)e^{xy(x)}\right) = \ln(2e^2) \iff \boxed{y(x) = \frac{\ln(2) + 2 - \ln(1+x)}{x}}$

3. Sia dato il campo di vettori $\vec{f}(x,y,z) = xy^2e^z\mathbf{i} + x^2ye^z\mathbf{j} + \cos(1+xy^3)\mathbf{k}$.

(a) Si calcoli il flusso (uscente) di $\vec{f}$ sul bordo di $\Omega := \{0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$ (3p.).

USO IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA

$\Phi(\vec{f}, \partial\Omega) = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz = \iiint_\Omega (y^2e^z + x^2e^z)\,dx\,dy\,dz =$

$\iint_D \left(\int_0^{1-x^2-y^2}(x^2+y^2)e^z\,dz\right)dx\,dy$ (dove $D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$) $=$

$\iint_D (x^2+y^2)\left(e^{1-x^2-y^2} - 1\right)dx\,dy =$ (coordinate polari)

$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho^2\left(e^{1-\rho^2} - 1\right)\rho\,d\rho\right)d\theta = 2\pi\int_0^1 \rho^2\left(e^{1-\rho^2} - 1\right)\rho\,d\rho =$ $(s = \rho^2)$

$= \pi\int_0^1 s\left(e^{1-s} - 1\right)ds = e\pi\int_0^1 se^{-s}ds - \pi\int_0^1 s\,ds =$

$e\pi\left[-se^{-s}\right]_0^1 + e\pi\int_0^1 e^{-s}ds - \pi\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^1 = -e\pi e^{-1} + e\pi\left[-e^{-s}\right]_0^1 - \frac{\pi}{2}$

$= -\pi + e\pi\left(-e^{-1} + 1\right) - \frac{\pi}{2} = \boxed{\left(e - \frac{5}{2}\right)\pi}$

(b) Si calcoli il flusso (uscente) di rot $\left(\vec{f}\right)$ sempre su $\partial\Omega$ (3p.).

Dato che $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{f}))=0$ il flusso di $\operatorname{rot}(\vec{f})$ su $\partial\Omega$ deve essere $\boxed{\text{zero}}$!!

(c) Si i calcoli il flusso di rot $\left(\vec{f}\right)$ sulla superficie "laterale" $S = \{x^2+y^2 \leq 1, z = 1-x^2-y^2\}$, con la normale orientata verso l'alto (cioè in modo da essere concorde con $\mathbf{k} = (0,0,1)$) (3p.).

Un modo di calcolare il flusso è notando che, per il punto (b), $\Phi(\operatorname{rot}(\vec{f}), S) = \Phi(\operatorname{rot}(\vec{f}), B)$ dove B è "la base" $\{x^2+y^2 \leq 1, z=0\}$, con normale verso l'alto. Per calcolare questo secondo flusso conta solo la componente z del rotore $\Rightarrow$ $\Phi(\operatorname{rot}(\vec{f}), B) = \iint_B (f_{2,x} - f_{1,y})\,dx\,dy =$

$\iint_B (x^2 e^0 - y^2 e^0)\,dx\,dy =$ (coordinate polari)

$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta)\rho\,d\rho\right) = \int_0^1 \rho^3\,d\rho \int_0^{2\pi}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,d\theta =$

$\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \int_0^{2\pi}\cos(2\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}\cdot 0 = \boxed{0}$

VOLENDO SI PUÒ USARE STOKES PASSANDO A $\int_\gamma \vec{f}\,d\vec{s}$ dove $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$....

4. Si risponda ai seguenti quesiti barrando una delle due caselle VERO FALSO (2 punti ciascuno).

(a) Se f_n sono continue su $[a,b]$ e $\sum_n f_n$ converge totalmente su $[a,b]$, allora $\sum_n f_n$ converge puntualmente su $[a,b]$ a una funzione continua ~~VERO~~ FALSO.

(b) Se un campo $\vec{f}$ è irrotazionale e γ è una curva chiusa, allora $\int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s} = 0$ VERO ~~FALSO~~.

(c) La somma della serie di Fourier $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^6+n^3+1}\cos(nt)$ è una funzione derivabile almeno due volte ~~VERO~~ FALSO.