COGNOME:

NOME:

MATR.:

Ingegneria Aerospaziale. Analisi Matematica 2. Compitino del 25 febbraio 2014

1. Data la funzione $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e l'insieme $M \subset \mathbb{R}^2$ definiti da:

$$G(x,y) := \ln(1 + xy^2) - x, \qquad M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : G(x,y) = 0\}$$

(a) Si mostri che $(0,0) \in M$ e che vicino a $(0,0)$ M è il grafico di una funzione $x = g(y)$ (1p.):

Dato che $G(0,0) = \ln(1) - 0 = 0 \Rightarrow (0,0) \in M$.

Dato che $\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2}{1+xy^2} - 1 \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial x}(0,0) = -1 \neq 0$

si ha che M è il grafico di una $x = g(y)$ per $y \sim 0$.

Possiamo anche calcolare (serve dopo)

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy}{1+xy^2}$$

(b) Si si calcolino $g'(0)$ (3p) e $g''(0)$ (3p.):

Per la formula nota $g'(y) = -\frac{G_y(g(y),y)}{G_x(g(y),y)} = -\frac{\frac{2g(y)y}{1+g(y)y^2}}{\frac{y^2}{1+g(y)y^2} - 1}$

$$= \frac{2y\,g(y)}{1 - y^2 - y^2 g(y)} \Rightarrow g'(0) = 0$$

Derivando $g'(y)$ si trova

$$g''(y) = \frac{\big(2g(y) + 2y g'(y)\big)\big(1 - y^2 - y^2 g(y)\big) - 2y\,g(y)\big(2y - 2y\,g(y) - y^2 g'(y)\big)}{(1 - y^2 - y^2 g(y))^2}$$

e mettendo $y = 0$ si trova $g''(0) = 0$

(dato che $g(0) = g'(0) = 0$)

2. Sia data la funzione di due variabili:

$$f(x,y) := e^{xy}.$$

(a) Si trovino tutti i punti critici di f (1p.) e si dica se sono massimi/minimi locali o selle (2p.):

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y e^{xy}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x e^{xy}$. Quindi l'unico pto critico è $\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$. Inoltre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{xy} + xy e^{xy}$. Ne segue che la Jacobiana di f in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ che ha determinante $<0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{SELLA}}$

Per il punto sotto notiamo che, se $G(x,y) = 4x^2 + 9y^2 - 36 \Rightarrow$

$\frac{\partial G}{\partial x} = 8x$ $\frac{\partial G}{\partial y} = 18y$

(b) si trovino il massimo e il minimo di f sull'insieme $B := \{(x,y) : 4x^2 + 9y^2 = 36\}$ (4p.):

Uso Lagrange $\Rightarrow$ condizioni $\begin{cases} y e^{xy} = 8\lambda x \\ x e^{xy} = 18\lambda y \\ 4x^2 + 9y^2 = 36 \end{cases}$ MOLTIPLICO LA I^a per $y/8$ LA II^a per $x/18$ e sottraggo

$\Rightarrow \frac{y^2}{8} e^{xy} = \frac{x^2}{18} e^{xy} \iff 9y^2 = 4x^2 \iff 3y = \pm 2x$

Se metto questa relazione nella $III^a \Rightarrow 8x^2 = 36 \iff x = \pm 3/\sqrt{2}$

da cui $y = \pm \frac{2}{\sqrt{2}}$. DUNQUE HO 4 PUNTI $\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}, \pm\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \left(\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}\right)$

sui quali f vale $e^{\pm 3}$ (+ se x e y CONCORDI, − SE DISCORDI)

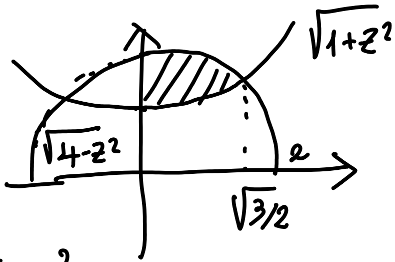
$\Rightarrow \boxed{\max_B f = e^3}$ $\boxed{\min_B f = e^{-3}}$

3. Si calcoli $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz$ (8p.), dove

$$f(x,y,z) := \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}z \quad \text{e} \quad D := \{x^2+y^2+z^2 \le 4, x^2+y^2 \ge 1+z^2, x \ge y \ge 0, z \ge 0\}.$$

Passiamo in coordinate cilindriche: $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, $z=z$

$\Rightarrow dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\theta\,dz$. Il dominio diventa



$$\tilde{D} = \left\{0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ \rho^2+z^2 \le 4,\ \rho^2 \ge 1+z^2,\ z \ge 0\right\} =$$

$$[0,\pi/4] \times \left\{0 \le z \le \sqrt{3/2},\ \sqrt{1+z^2} \le \rho \le \sqrt{4-z^2}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{Integrale} = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sqrt{3/2}} dz \int_{\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} z\rho\,\frac{\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2}\,d\rho =$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2\theta)\,d\theta \int_0^{\sqrt{3/2}} z \int_{\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \rho\,d\rho = \left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/4} \cdot$$

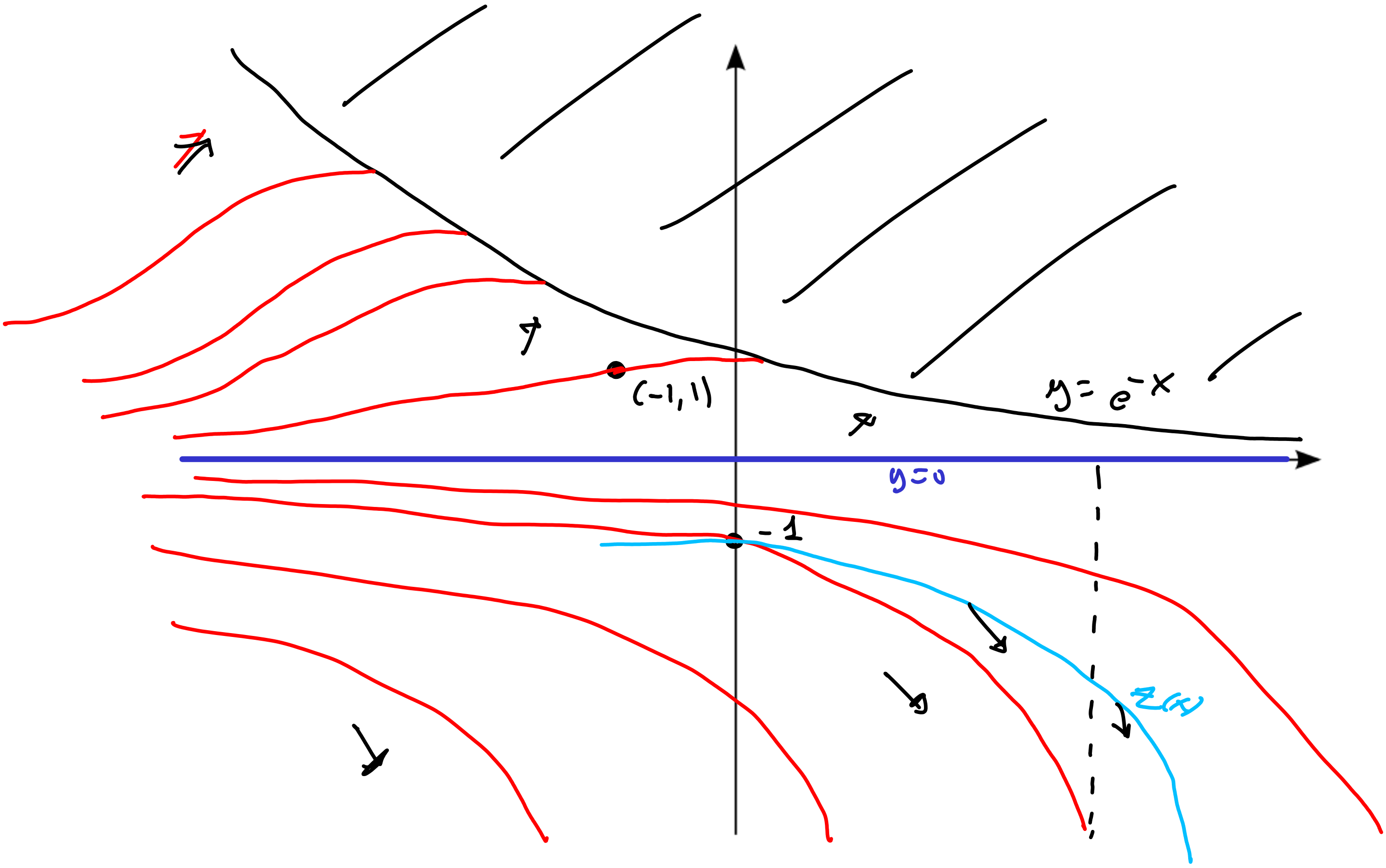
$$\int_0^{\sqrt{3/2}} z\left[-\frac{\rho^2}{2}\right]_{\sqrt{1+z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} dz = \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3/2}} z\left(3-2z^2\right)dz = \frac{1}{8}\int_0^{3/2}(3-2s)\,ds$$

(ho posto $s=z^2$) $$= \frac{1}{8}\left[3s-s^2\right]_0^{3/2} = \frac{1}{8}\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{4}\right) = \frac{9}{32}$$

4. Dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y\sqrt{e^{-x}-y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(a) Si trovi (1p.) il sottoinsieme del piano cartesiano Ω per cui vale il teorema di esistenza e unicità locali (cioè tale che, se $(x_0,y_0) \in \Omega$, esiste unica $y(x)$ soluzione del problema, definita per x vicino a x_0). Si trovino inoltre (1p.) i sottoinsiemi Ω^+ e Ω^- dai quali $y(x)$ parte con derivata positiva e con derivata negativa e le eventuali soluzioni costanti (1p.). Si disegnino questi insiemi nel piano cartesiano rappresentato di seguito.



(b) Se $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ si disegni la soluzione $y :]\underline{x}, \overline{x}[\to \mathbb{R}$ nel piano cartesiano riportato sopra, spiegando se i tempi di esistenza massimale $\underline{x}$ e $\overline{x}$ sono finiti o infiniti e se sono finiti o infiniti $\underline{y} := \lim_{x \to \underline{x}^+} y(x)$ e $\overline{y} := \lim_{x \to \overline{x}^-} y(x)$ (4p.)

$\boxed{\underline{x} = -\infty}$ perché $y(x)$ è crescente e per x "all'indietro" $y(x)$ non può toccare la curva $y = e^{-x}$. Inoltre $y(x)$ non tocca la costante $y=0$ perché vale l'unicità

$\boxed{\underline{y} = 0}$ perché se $\underline{y} > 0 \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} y'(x) = \lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to \underline{y}}} y\sqrt{e^{-x} - y} = y\sqrt{|y|} \neq 0$

e questo non è possibile

$\boxed{\overline{x} < +\infty}$ perché se $y(x)$ cresce deve per forza finire sulla curva $y = e^{-x}$ e allora $\overline{y}$ è tale che $\overline{y} = e^{-\overline{x}}$ $\boxed{\overline{y} < +\infty}$

(c) Stessa domanda del punto precedente nel caso $(x_0, y_0) = (0, -1)$ (5p.) Suggerimento: per $\overline{x}$ si confronti $y(x)$ con la soluzione $z(x)$ di $z' = z\sqrt{-z}$, con $z(0) = -1$.

$\underline{x} = -\infty$ e $\underline{y} = 0$ per gli stessi motivi del punto precedente

$\overline{x} < +\infty$ e $\overline{y} = -\infty$. Infatti, se $y < 0$, si ha

$\sqrt{e^{-x} - y} \geq \sqrt{-y} \Rightarrow y\sqrt{e^{-x} - y} \overset{(*)}{\leq} y\sqrt{-y}$. Se considero

l'eq. a variabili separabili $z' = z\sqrt{-z}$, $z(0) = -1$ trovo

$\int_{-1}^{z(x)} \frac{ds}{s\sqrt{-s}} = x \iff 2\left(\frac{-1}{\sqrt{-z(x)}} + 1\right) = x \iff z(x) = -\frac{4}{(x-2)^2}$ se $x < 2$

e per $(*) \Rightarrow y(x) \leq z(x)$ dunque $y(x)$ esplode (negativamente) per $\overline{x} < +\infty$